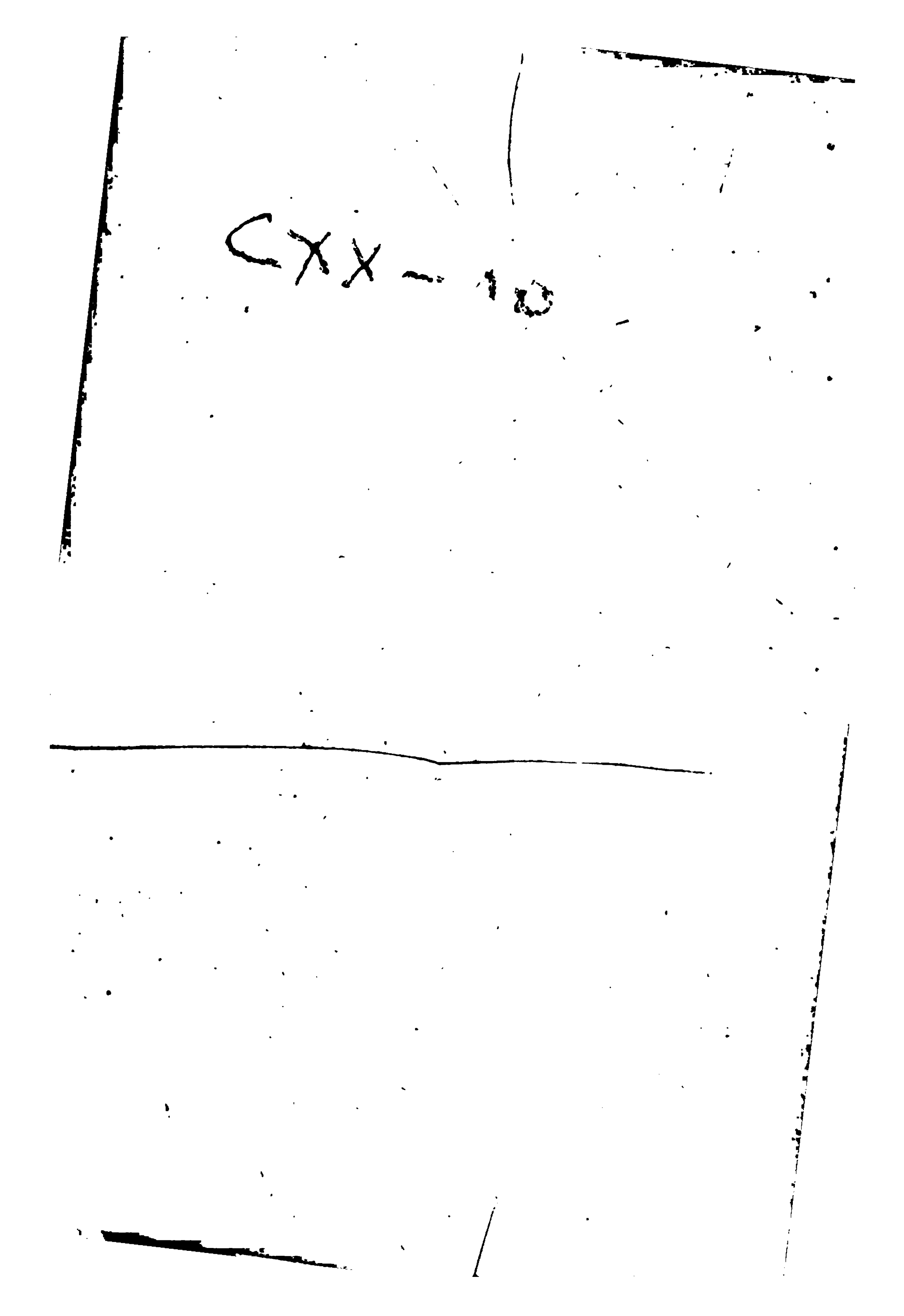


1817
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR




CXX-10

PRINCIPIOS
DE MATEMÁTICA

TOMO III.

PRINCIPIOS DE MATEMÁTICA DE LA REAL ACADEMIA DE SAN FERNANDO

POR DON BENITO BAILS.

SEGUNDA EDICION, AÑADIDA.

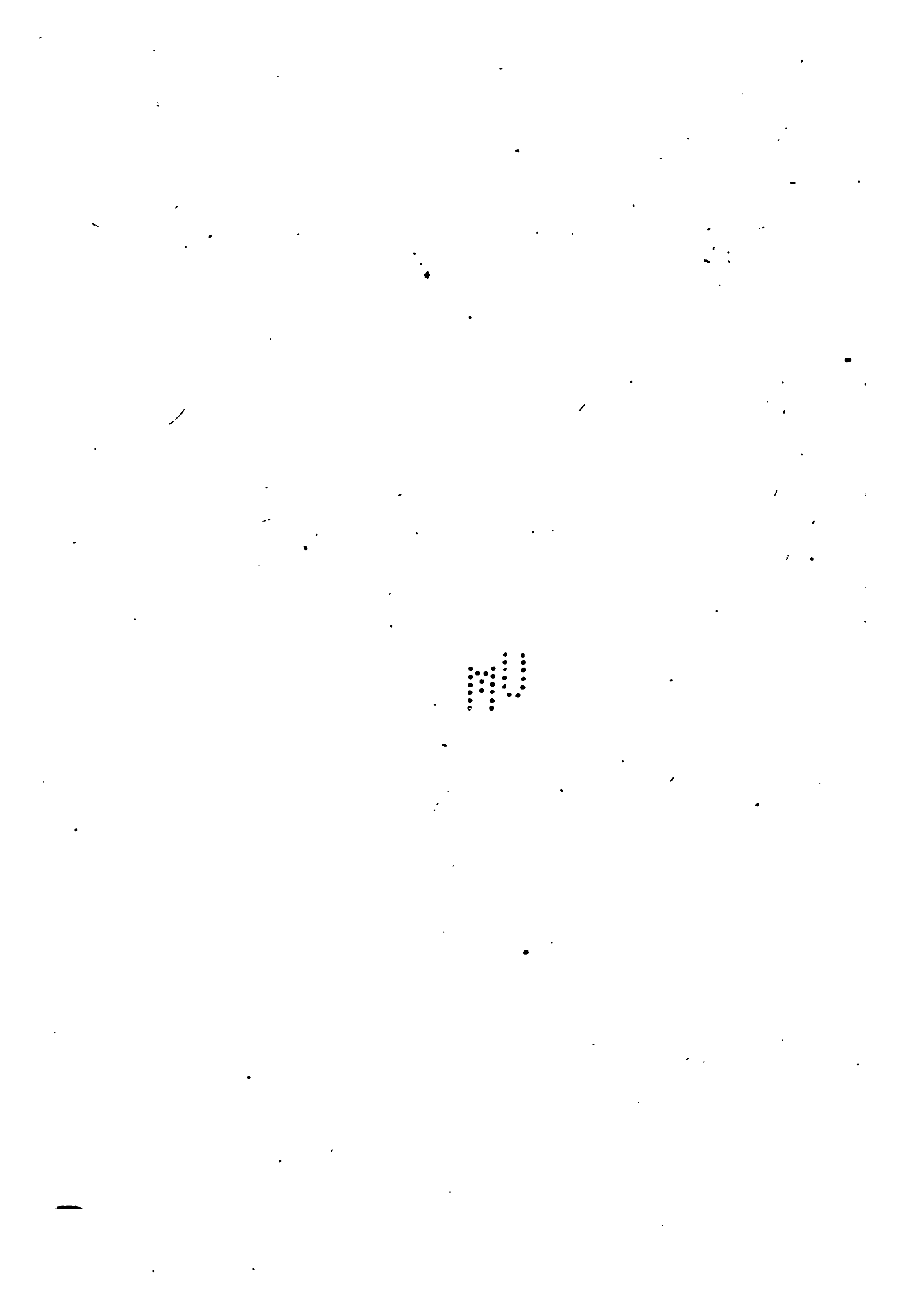
TOMO III.



MADRID.

EN LA IMPRENTA DE LA VIUDA DE IBARRA.

M.DCC.LXXXX.



PROLOGO DE LA PRIMERA EDICION.

Despues de declarada en los dos primeros Tomos la Especulativa de la Matemática, ó la *Matemática pura*, nos tocaba declarar en los dos siguientes la *Matemática mixta*, ó la aplicacion de la Especulativa á los diferentes asuntos prácticos que abraza esta Ciencia. Bien que son todos de igual importancia los ramos de la Matemática mixta, hay sin embargo unos de mayor consideracion que otros, ya se atienda á la multitud de las cuestiones que les pertenecen, ya porque en ellos se fundan otros tratados de menor gerarquía.

Por lo mismo que á los de mayor consideracion corresponde el primer lugar, se le hemos dado en este Tomo, donde publicamos la Dinámica, Hydrodinámica, Optica y Astronomía, ciñéndonos, por no permitir otra cosa los límites de esta obra, á los puntos mas esenciales que hemos procurado tratar con alguna extension. Porque la obligacion del que hace un compendio ó extracto consiste, en nuestro sentir, en dar á conocer los asuntos fundamentales no mas de la obra principal; su fin debe ser descartar cuestiones, no embrollarlas, tratándolas ó muy diminutas ó con sobrada concision por quererlas tratar todas.

Antes de concluir esta breve noticia no podemos dexar de prevenir que incluye este Tomo una novedad que acaso dará que decir á muchos, y

es que en los Principios de Astronomía demostramos el Sistema Copernicano ó la opinion del movimiento de la tierra. Una vez que la tenemos por la verdadera, y es su objeto un punto de Filosofia natural, no cabia en nuestra franqueza disimularlo, y una vez que la demostramos, nos asiste el derecho de pedir que antes de abominar de este sistema se pesen las razones en que le fundamos. Sabemos que en otros tiempos se miró como novedad peligrosa esta opinion, y se prohibió seguirla; pero se tiene hoy dia por tan desacertada en Roma mismo su prohibicion, que se ha borrado del Indice del Expurgatorio, y acá en España salió al público sin el mas leve reparo ni contradiccion un papel pósthumo de D. Jorge Juan (*a*), cuyo asunto es probar el movimiento de la tierra qual le admiten los Copernicanos.

(*a*) *Estado de la Astronomía en Europa, y juicio de los fundamentos sobre que se erigieron los sistemas del mundo, para que sirva de guia al método en que debe recibirlos la nacion, sin riesgo de su opinion, y de su religiosidad. Su Autor Don Jorge Juan, &c.* Con licencia. En Madrid, en la Imprenta Real de la Gaceta 1774 fol.

PROLOGO

DE ESTA SEGUNDA EDICION.

Aunque de igual utilidad todos los asuntos de este tomo, es sin duda alguna la Astronomia el de mayor elevacion. En las investigaciones propias de los demas, sigue el hombre quieto en su morada, y á la hora que mejor le acomoda el hilo de sus tareas; pero para dedicarse á las investigaciones peculiares á la Astronomia, tiene que abalanzarse, por decirlo así, al firmamento, inventar muchísimos instrumentos, y discurrir varios métodos, que todos requieren extraordinaria aplicacion, constancia y sagacidad; tiene que pasar la mayor parte de su vida separado de los demas hombres, gastando las noches en la contemplacion de las apariciones celestes, y los dias reparando con el sueño el menoscabo que causan en sus fuerzas sus afanes astronómicos.

Son, pues, dos en general los principales puntos que deben llamar la atencion en un tratado da esta ciencia, aunque muy sucinto; las circunstancias de la Astronomía, y los trabajos del Astrónomo. Me detendré á pintarlos aquí, traduciendo, si acierto, algunos párrafos de la historia de la Astronomía de Mr. Bailly, obra que no puede menos de dexar plenamente satisfecho á un lector atento, y en la qual todo sobresale, diligencia, doctrina, claridad, filosofia y eloqüencia.

" La Astronomía (dice Mr. Bailly) nacida en los

los campos y entre pastores, ha pasado de los hombres mas sencillos á los entendimientos mas sublimes. Grandiosa por la inmensidad de su objeto, curiosa por sus medios de investigacion, portentosa por el número y la especie de sus descubrimientos, es tal vez la medida de la inteligencia del hombre, y la prueba de lo que puede con el tiempo y el ingenio. No porque haya encontrado aquí la perfeccion que en todo le es negada, sino porque en ningun asunto el entendimiento humano ha discurrido mas recursos, ni dado muestras de mayor sagacidad. Es consideracion digna de todo hombre curioso trasladarse á los tiempos en que esta ciencia empezó, ver como los descubrimienros se han ido encadenando, como los errores se han mezclado con las verdades, atrasando su conocimiento y sus progresos; y despues de recapacitados todos los tiempos y recorridos todos los climas, contemplar al último el edificio fundado sobre los trabajos de todos los siglos y de todos los pueblos.

„ La voz Astronomía, en su significado general, quiere decir *ciencia de los astros*. Compónese de dos voces griegas, que la una significa *astro*, y la otra *ley*, *regla* ó *medida*. Esta etymología pudiera dar á entender que el objeto de la Astronomía no es otro que medir el movimiento de los astros, y averiguar las leyes, las reglas á las quales vá ajustado; pero en realidad abraza esta ciencia todo quanto tiene relacion con la naturaleza de los cuerpos celestes. "

„ Es

„Es, pues, el objeto de la Astronomía hacer la enumeracion de los astros, distinguir los que son fixos de los que son errantes, y señalar en el cielo el lugar del qual los unos nunca jamas se apartan, y trazar el rumbo de los otros, demarcando los límites, y manifestando hasta las mas mínimas irregularidades de su carrera; conocer los fenómenos que resultan de la combinacion de estos diferentes movimientos; por lo que toca á los astros mismos, su objeto es observar sus apariencias, su figura, su magnitud respectiva ó real, y hasta su densidad; quiero decir la cantidad de materia que tienen en un volumen dado. Estos conocimientos son el fruto de una observacion constante y continuada. Es preciso que los hombres velen sin descansar por no perder circunstancia alguna de estos movimientos inalterables, y conocer la naturaleza que nunca jamas descansa. Por este medio se forman aquellos depósitos preciosos para el entendimiento humano, donde los siglos que ninguna huella dexan de sí, quedan fixados con las observaciones astronómicas. El tiempo corre, y su pérdida redunda en beneficio de la ciencia, la qual vá creciendo con la edad del mundo.

„Pero despues que la Astronomía ha observado de este modo los fenómenos, no ha desempeñado mas que su primer objeto; otro le queda por desempeñar mas filosófico, que consiste en indagar la explicacion de estos fenómenos, juntar las diferentes causas, efectos de otra causa de ma-

yor

yor influxo, y alcanzar por este camino la ley simple que es la causa universal: la ciencia no habrá llegado á su término sino despues que lo hubiere conocido todo, y explicado todo. Ha hecho y está haciendo progresos rápidos; su destino es acercarse sin cesar á este término, y nunca jamas alcanzarle.

„ Esta investigacion de las causas es empeño reservado al astrónomo filósofo. Los observadores recogen, los hechos se amontonan como los materiales de un edificio, y esperan al hombre de ingenio, quien solo puede ser el arquitecto del universo. El es quien combina los hechos; percibe su relacion. Una explicacion generalizada en su cabeza llega á ser la llave de una multitud de fenómenos; vá siguiendo la cadena donde la naturaleza eslabona sus misterios; camina descubriendo sus arcanos, y vé patente el mecanismo del universo. Así caminaron Hiparco, Ptolemeo, Copérnico, Ticho, Keplero, Domingo Casini y el gran Newton, cuyos nombres para siempre memorables, son acreedores al respeto y agradecimiento de todas las edades.

„ Quedan todavía muchísimas cuestiones por decidir: esta será la obra del tiempo y la cosecha de la posteridad. Pero en esta obra que ha de ser el depósito, y al mismo tiempo la historia de los conocimientos, causará admiracion la carrera andada por el entendimiento humano. El primer pastor, que alzando los ojos á la bóveda celeste, deseó conocer el número y el movimiento de los as-

astros, fué el primer inventor de la Astronomía. Pero ¡quanta distancia de esta mirada, que, por decirlo así, no pasó de la superficie del cielo, á la mirada con que Newton caló el universo! ¡Quanta distancia de aquellos hombres groseros, quienes viendo el sol desaparecerse debaxo del orizonte, creian que de noche se apagaba para encenderse otra vez por la mañana del dia siguiente, al hombre inmortal, quien de una sola ley, de un principio único infirió todos los fenómenos; quien enseñó que una fuerza inherente á cada partícula de materia, junta con el primer impulso dado por el Criador, arreglaba y mantenia el movimiento del universo! Que vió los globos bambolear, andando el camino que les tiene señalado la naturaleza, ¡quien los siguió en sus irregularidades, y halló constantemente la ley y el principio que habia anunciado! Esta distancia es inmensa; el entendimiento humano la ha andado con pasos desiguales, y volviendo muchas veces atrás. La barbarie que á temporadas vuelve á empuñar el cetro del mundo, ha dexado perder muchas veces los vestigios de la industria humana; cuyos vestigios no los han conocido sino á costa de mucho trabajo generaciones muy distantes. A veces una observacion penosa y constante ha llenado el intervalo de muchos siglos; era el cimiento sobre el qual nosotros edificamos hoy dia: á veces algunos hombres célebres, recogiendo los trabajos de sus predecesores, combinando los hechos para deducir sus consecuencias, han propues-

puesto sistemas, que segun el destino de los sistemas habian de perecer un dia; á veces entendimientos sólidos y mas afortunados han columbrado alguna de aquellas verdades que arrojan luz á los siglos venideros, y cuyas consecuencias sirven de guia para nuevas indagaciones. El estado actual de la Astronomía es el espectáculo mas lisongero para el filósofo que desea conocer los efectos y las causas, y prueba quanto pueden los empeños unidos á los empeños, y la constante aplicacion de muchos hombres dedicados á cultivar un mismo objeto á pesar de las mudanzas de las generaciones que se renuevan, de los azotes que afligen á la especie humana; y por fin á pesar de la misma ignorancia que al cabo de ciertos periodos vuelve á levantar la cabeza y viene á derribarlo todo. ...

„ En la Astronomía pueden distinguirse tres partes, las quales si bien tienen por objeto comun el conocimiento de los astros, cada una se dedica sin embargo á un objeto particular, sigue rumbo y progresos diferentes. La observacion, ó la enumeracion de los fenómenos; los resultados inferidos de las observaciones, ó el descubrimiento de la cadena que tiene eslabonados los fenómenos; la teórica ó la explicacion de los fenómenos por las leyes conocidas del movimiento.

„ La observacion consiste en determinar el lugar que un astro ocupa en el cielo en el instante que se le observa. Quando el astro es fixo, la determinacion queda hecha para siempre, y solo necesita repetirse despues que llegan á perficionar-

se

se los medios de observar, ó así que se llega á conocer que no es fixo un astro que por tal se tuvo. Quando el astro tiene movimiento, la observacion solo enseña el lugar que el astro ocupaba en el cielo en un instante señalado, pero no enseña el lugar que ocupará al dia siguiente, de aquí nace la necesidad de repetirse las observaciones. Bastan constancia y trabajo para juntar observaciones, y formar aquellos depósitos, fundamento de los trabajos de la posteridad, quando le son transmitidos. La guerra ha asolado tantas veces la tierra, que los antiguos depósitos ya no subsisten. Estas riquezas literarias no tentaron á conquistadores groseros, y las bibliotecas antiguas perecieron, á veces aniquiladas por la superstición, muchas veces disipadas por la ignorancia, cuyo genio es dexarlo todo perecer, porque nada mira con interes, por lo mismo que nada mira con conocimiento. Está es la causa por que estos repuestos de observaciones muchas veces disipados han sido muchas veces empezados. Los anales de los pueblos hacen memoria de observaciones continuadas muchos siglos seguidos, de las quales solo queda un corto número. Mas son las que echamos menos que no las que tenemos.

„ Los resultados son los conocimientos ó las verdades que pueden sacarse de una ó muchas observaciones. Tales son v. gr. respecto de los astros que se mueven, el conocimiento de la forma, la magnitud, la posicion de su órbita en el cielo, el conocimiento de su revolucion, de su ve-

velocidad, de las variaciones de esta velocidad que nunca es uniforme, y de las irregularidades de estas variaciones que suelen ser muy complicadas. Estas mudanzas, llamadas generalmente *fenómenos*, vuelven á ser las mismas al cabo de cierto periodo. Todas son consecuencia unas de otras, pues acaecen succesivamente, y por el influxo de una misma causa. La serie y el enlace de estos efectos son dificultosos de conocer. El logro del fin pende del tino de la invencion, y del conocimiento de todos los hechos. Conforme los hombres entregados á esta indagacion han sido mas ó menos dotados de este tino, mas ó menos impuestos en los hechos, ha sido mas ó menos cumplido el logro de su deseo, han inventado ficciones ó descubierto verdades. Así Ptolomeo ó sus predecesores complicaron la explicacion del movimiento de los planetas, con círculos multiplicados dando vueltas unos por dentro de otros; así Keplero substituyó una elipse á estos círculos, y aquel varon, dotado sin la menor duda del don de invencion, reduxo con una ocurrencia luminosa la Astronomía á la verdadera forma de las órbitas celestes.

,, Camina, pues, muchas veces á obscuras este ramo de la Astronomía; porque unas veces ha habido luces sin hechos, otras hechos sin luces; á veces luces y hechos todos han faltado juntos. Si el entendimiento humano ha abrazado una mala hipótesi, lo ha hecho porque no tenia entonces bastante extension para percibir muchas, porque

no

no tenia bastante perspicacia para percibir sus defectos, ó porque le faltaban hechos para formar de ella cabal juicio. Vinieron despues nuevos hechos, los quales por no quadrar con la primer hipótesi dieron ocasion de imaginar otra; y el hombre ha recorrido en toda linea el círculo de los supuestos, y el círculo todavía mayor de los errores, antes de llegar á la verdad, cuyo caracter, en Astronomía igualmente que en Física, es confirmar, explicar los fenómenos pasados, y ser tambien confirmada por los fenómenos venideros.

„No está todo aquí. Los hechos mismos ó las observaciones, fundamento de todo, no se compadecen con una exâctitud rigorosa, que solo se halla en la Geometría. Pero la Geometría, considerada como ciencia de la extension y del movimiento, está desnuda de todas las demas circunstancias físicas; es puramente intelectual, y obra del entendimiento quien ha fundado esta exâctitud en las abstracciones, cuya exâctitud se desaparece, hablando con verdad, luego que al aplicar la Geometría á la Física, se la saca de la fantasía del hombre para acercarla á la naturaleza.

„En Física todo conocimiento rigorosamente exâcto le es negado al hombre; todo quanto puede es llegar al punto de precision proporcionado al grado de su industria y á los medios mecánicos que tiene en su mano.

„Hay por consiguiente errores, ó, mejor diré, dudas inevitables, así en las observaciones como en los resultados. En las observaciones, porque el hom-

hombre observó primero con sus ojos solos, primeros instrumentos suyos; despues se ha auxîliado de algunos instrumentos toscos; los quales se han perficionado y se perficionan hasta cierto grado del qual la industria humana no puede pasar. Así las observaciones son y serán mas precisas; pero al mismo tiempo cada resultado fundado en estas observaciones sale manchado con su falta de precision; luego las determinaciones principales y fundamentales de la Astronomía necesitan renovarse, y son de tan singular naturaleza los progresos de este género de conocimientos, que la ciencia adelanta solo destruyendo. Las medidas actuales todas ván fundadas en los trozos de las medidas mas antiguas, y aquellas así que lleguen con el tiempo á ser tambien antiguas, tendrán el mismo destino que estas. Pero de aquí no debe inferirse cosa alguna contra la ciencia, porque esta es un conocimiento real, acaso el único que poseemos, esto es el conocimiento de los límites dentro de los quales la exâctitud ó la verdad está ceñida. El estrechar estos límites es obra de las naciones venideras. Por otra parte, no toda la incertidumbre inherente á cada observacion influye en las determinaciones, puede repartirse entre todas. Quando se quiere determinar v. gr. la duracion de qualquier periodo, la determinacion está expuesta al error de la observacion hecha al principio, y al error de la observacion hecha al fin del periodo. Pero si desde la una observacion á la otra han pasado ciento ó mil de estos

tos periodos, el error repartido entre todos influirá poco en el conocimiento de la duracion del periodo. En esta obra se verá á los Astrónomos de diferentes siglos ocupados unos despues de otros en los mismos trabajos, para perficionarlos sin cesar. Con nuestra industria hemos hallado el medio de minorár los errores que no podemos evitar, y de acercarnos á aquella exâctitud rigorosa, á la qual no nos es posible llegar, aunque de ella realmente tengamos idea.

,, La teórica es la explicacion de los fenómenos celestes por las leyes del movimiento. Algunos filósofos antiguos tuvieron opiniones acerca de la formacion del mundo, acerca de los elementos de que se compone; á cuyos elementos añadian ó quitaban otros quasi á medida de su antojo: en esto no eran mas que físicos, pero malos físicos. Los elementos del mundo son mucho mas impenetrables que no las causas de los movimientos celestes; son los últimos atrincheramientos de la naturaleza, y allí acaso está la causa universal. Proponian con tanto mayor desahogo sus aserciones, quanto donde es menos asequible la verdad, es tanto mas dificultoso demostrar el error. Era, pues, limitada la explicacion del mundo á algunos pensamientos físicos acerca de su formacion. La antigüedad ha guardado un profundo silencio acerca de las causas que arrojan y sujetan los cuerpos celestes en sus órbitas.

,, En Astronomía las observaciones, y aun los resultados no manifiestan sino efectos, cuya causa

es natural que los hombres deseen conocer. Pensamiento sublime fué el osar reducir las leyes del movimiento general del universo á las leyes del movimiento de los cuerpos terrestres. Esta empresa toda es privativa de nuestros siglos modernos; se la reconocemos á Descartes. Sus torbellinos son una mala explicacion de la pesantez y del sistema del mundo, pero sus torbellinos son mecánicos. Há descubierto que era uno mismo el mecanismo que movia los cuerpos en los espacios celestes y en la superficie de la tierra; si no se ha adivinado este mecanismo no se nos ha olvidado que este pensamiento nuevo y grandioso es parto de su ingenio. Lo que Descartes se propuso, Newton lo executó. Nada defraudamos de la gloria de este gran varon con hacer justicia á Descartes.

„Este es el objeto, esta es la naturaleza de los progresos de la Astronomía. En esta obra se verá quanto tiempo y trabajo ha sido menester para averiguar que los movimientos de los astros al parecer tan complicados son sencillísimos en la realidad, y efecto de una causa mas sencilla todavía.

„Si los fundadores de la Astronomía, si los hombres de ingenio, los primeros que ensancharon el recinto de sus conocimientos, quienes desesperaron de poder explicar, ni siquiera conocer los fenómenos, si, como digo, esos hombres, tan acreedores á nuestra gratitud, volviesen hoy dia al mundo, quan atónitos no se quedarian al ver

co-

como su posteridad ha desenredado este caos, y, por decirlo así, se ha enseñoreado del sistema del universo! ¡Quantos hombres extraordinarios desconocidos hoy dia han cooperado á estos progresos! Pero no son los primeros inventores los mas celebrados; la ignorancia disfruta y no aprecia. Los inventos útiles, del mismo modo que las semillas de los vegetables, crecen y maduran sin ruido; los frutos se cogen sin trabajo, y el vulgo goza de unos y otros sin informarse como ni de donde vienen, y sin figurarse lo que han costado.

„ Hemos puesto en la clase de los inventos útiles los inventos de la Astronomía, y los hombres ilustrados á buen seguro no preguntarán si con efecto esta ciencia es útil. Pero son tantos los que todavía están persuadidos á que las ciencias, y esta especialmente, no son mas que un asunto de mera curiosidad, que tenemos por oportuno especificar aquí menudamente los beneficios que se les siguen á los hombres de la práctica y del estudio de la Astronomía. Proporciona desde luego la misma utilidad que las ciencias en general; ilustra al siglo, y perficiona el entendimiento humano. La masa de las luces nacionales se compone de todos los conocimientos particulares. Cada descubrimiento, cada pensamiento nuevo y verdadero viene á colocarse por sí en este repuesto, todos juntos causan un movimiento imperceptible, el qual se comunica á todos los entendimientos; en poco tiempo las luces se distribuyen y reparten á la nacion. Al modo que los principios levanta-

dos por la evaporacion de cada terreno particular, llevados y mezclados por los vientos dán al ayre de una provincia ó de un reyno un caracter y propiedades generales originadas de la combinacion de dichos principios.

,, La aficion á las ciencias y á las letras, al paso que suaviza las costumbres, hace mejores y mas felices á los hombres. Los liberta en general de la intriga y la ambicion; inclina á la virtud mediante el amor de la verdad. No hay sobre la tierra mas hombre de bien que el hombre veraz. No es posible que un hombre cale los abismos de la naturaleza, se dedique á descubrir sus arcanos, exâmine los hechos, los fenómenos, no admita como verdadero sino lo que lo es en realidad, sin buscar y profesar verdad en el discurso de su vida. El amor de la verdad que le mueve á estas investigaciones no puede menos de extenderse á la moral, y llegar á ser principio, así como el trabajo llega á ser costumbre. Esto podria amplificarse si la práctica de la Filosofia y el estudio de las ciencias necesitasen de apología. Pero aquí solo se trata del estudio de la Astronomía.

,, Esta ciencia segun ó conforme se ha perficionado ha ido curando preocupaciones, y disipando temores, nacidos acaso de la infancia de la misma ciencia. Es este un beneficio real que ha hecho al género humano. El hombre nace tímido, teme sobre todo los peligros que nó conoce, aquellos peligros con los quales no ha medido sus fuerzas y su prudencia. Antes que se familiarizase con la natura-

ra-

raleza empezó temiéndola, y era regular que le causase espanto. Muy pronto se acostumbró al orden invariable del cielo, á la succesion constante de sus fenómenos; pero los fenómenos mas raros le parecieron un trastorno del orden natural. El primer eclipse total del sol hizo temer la aniquilacion del mundo. El primer eclipse de luna hizo temer la pérdida de este astro; creyóse que un dragon queria tragársela. Los cometas reparables, espantosos por su cola, por su cabellera, pronosticaban (así pensaba el vulgo) la muerte de los príncipes, la ruina de los imperios, peste, hambre, &c. La Astronomía con manifestar las causas de estos fenómenos ha tranquilizado los ánimos. El dia de hoy ni aun el pueblo se espanta de los eclipses. El terror de la aparicion de los cometas ha subsistido mas tiempo. Por el año de 1680, quando Newton calculaba las órbitas de los cometas, quando Haley iba á pronosticar su regreso, quasi toda Europa estaba en una profunda *ignorancia* acerca de la naturaleza de estos astros. Se miraban como los anuncios de las venganzas de Dios, el susto era grande y general. Pero la Astronomía con enseñar que los cometas tienen un regreso cierto, y una carrera invariable, ha desvanecido esta preocupacion.

„ La Astrología judiciaria es una enfermedad no menos lastimosa del entendimiento humano. Originóse sin duda alguna del abuso de la Astronomía. Todos los hombres deseosos de llegar á los tiempos venideros, quisieran conocer por

lo menos el que les espera; solo el sabio sabe que este conocimiento le sería funesto. Infeliz con lo pasado, descontento con lo presente, el hombre no vive sino de esperanzas. La incertidumbre de su destino le sostiene en una carrera que hace empeño de precipitar. Si lo futuro se le manifestara, atormentado de los males venideros como presentes, poco lisongeado de bienes perdidos antes de gozarlos, su exîstencia no sería mas que una carga pesada. La Divina Sabiduría ha querido apartar de nosotros estos males, que la Astrología judiciaria ha intentado derramar sobre la tierra. Todavía se experimentan en algunas regiones donde la luz de las ciencias no ha penetrado. No ha mucho tiempo que los pueblos todavia tenian sus adivinos, y los príncipes sus astrólogos. Catalina de Médicis, poseida de este error, mandó levantar la torre del palacio de Soisons, para ir á interrogar á los astros; que los malvados especialmente son ansiosos de saber lo por venir, y los remordimientos de su conciencia son una especie de astrología que les quita el sosiego. La muerte de Henrique Quarto, ya antes ya despues de este desgraciado suceso, ¿quien podrá creer que el celebre Domingo Casini del estudio de la Astrología pasó al de la Astronomía? No tardó en desengañarse, y con la luz que sus trabajos arrojaron desengañó á su siglo. El conocimiento reflexîonado del movimiento de los cuerpos celestes ha abierto los ojos de todos. La distancia muy averigüada de los astros ha probado

que

que están á mucha distancia para que sus influxos alcancen hasta nuestro globo. Hay todavía mas: estos cuerpos que, por el movimiento diurno de la tierra, parece que dan cada dia la vuelta alrededor de nosotros, no pueden menos de obrar cada dia de un mismo modo. Son, pues, inútiles para explicar ó pronosticar las variedades de los genios, de las pasiones y de los destinos. Se ha conocido que sus aspectos; sus encuentros determinados desde el principio del mundo por movimientos invariables, nada le pronostican al hombre; que sus esferas, separadas de la nuestra por inmensos intervalos, prohiben toda comunicacion, menos la de la luz, que sin duda alguna es la misma para todos los astros, y por otra parte cae igualmente para todos los hombres.

II. „ El edificio del observatorio (el de Paris) mas es un monumento de magnificencia que de utilidad. Pero, bien que inutil para la Astronomía, que no necesita de tanto luxo, sirve para manifestar el cuidado y fomento de los reyes. A la Astronomía le basta una torre redonda bastante alta para que domine todo el contorno del orizonte bastante capaz para colocar y mover sin sujecion alguna en su recinto los instrumentos necesarios. Se ha discurrido cubrirle con una cubierta cónica, rasgada de arriba abaxo por una abertura longitudinal; la cubierta movible dando vuelta dirige esta abertura al arbitrio del observador, y ácia la parte del cielo donde necesita aplicar la vista. En medio de la torre hay un quadrante

de círculo, cuyo destino es ser dirigido á todos los puntos de la bóveda celeste, y señalar la altura de los astros que allí se encuentran. En la direccion del meridiano la pared de la torre está rasgada; allí se coloca otro quadrante de círculo llamado *mural*, porque está sólida é invariablemente asegurado en el muro. Este instrumento, y sobre todo el hilo sutil que atraviesa verticalmente la abertura del anteojo, representa el meridiano; anteojos de todos tamaños, de potencias diferentes están desparramados y colgados. Cerca del observador están las péndolas; con la vista sigue el movimiento de las manos, con el oido percibe el movimiento del escape á cada vibracion. Aquí está en pie el astrónomo, atento á todos los fenómenos; viene á ser como el centro del mundo, el cielo dá la vuelta alrededor de él, y la naturaleza se pone en movimiento para manifestarse á su vista. Vamos á observarle á él mismo, seguiremos, pintaremos sus operaciones; deseamos que los mozos que se dedican á la Astronomía hallen aquí la pintura de sus obligaciones y el uso que han de hacer de sus desvelos; los que no se dedican á esta ciencia, mejor informados, dexarán de espantarse, y empezarán á dár crédito á las respuestas de la naturaleza, despues de formar juicio del modo de interrogarla.

,, El que entra en este santuario, debe estar todo entregado al servicio de Urania. Esta es la diosa cuyo sacerdote es, y cuyos oráculos manifiesta; pero estos oráculos los logra, se los arranca

con

con su eficacia; no tiene descanso sino los dias sombríos y tristes, los instantes en que la naturaleza añade á todos sus velos el velo de las nubes, su dia le interrumpen, se le cortan diferentes observaciones; el sol le ocupa por la mañana, á mediodia, por la tarde; y luego que este astro se desaparece, los demas planetas, las estrellas se dexan ver para ocuparle con nuevos trabajos. Los Astrónomos suelen repartírselos, pero el que los abraza todos es preciso tenga un cuerpo de bronce; es preciso que el zelo de la ciencia le despierte á instantes señalados de la noche; es preciso que este zelo le defienda del sueño, si ha de velar toda la noche; es preciso que estas vigilias se repitan si se dedica al trabajo continuo y renovado todas las noches de las observaciones de las estrellas; todo esto lo executa pegado el ojo al anteojo, el oido á la péndola, en pie, ó el cuerpo doblado, echado muy á menudo boca arriba mirando al zenit, á pesar del frio de las noches de invierno, á pesar de la fatiga del velar. Esta es la vida quasi nocturna de los Astrónomos; esta fué la vida de Tichò, Hevelio, Flamstead, esta apresuró la pérdida, y causó la temprana muerte del Abate La-Caille, de un maestro que todavía lloramos, y que la ciencia, la virtud y la amistad echan todavía menos con nosotros. Estas fatigas son mayores en las partes de Europa donde la Astronomía ha sido cultivada con mas empeño. Copenhague, Dantzick, Londres, Paris, donde han vivido aquellos celebrados ob-

observadores, y el cielo es tan vario como los hombres. Las noches serenas suelen ser solas, aisladas, y no se siguen sino en intervalos muy cortos del año; las demas noches están cubiertas de una gasa, no hay sino instantes. Es, pues, preciso atisbar estos momentos, y la inconstancia del cielo que se muestra propicio al observador. Las mas de las observaciones se hacen así á hurtadillas; son obra de la constancia, del zelo, y mas que todo del tiempo que las vá juntando para formar un cuerpo de doctrina. Pero acaso estos mismos obstáculos acrisolan la eficacia; parece que el hombre no pone empeño en sus investigaciones sino á proporcion de lo que se le resisten; en toda linea parece que los conatos son proporcionados á la necesidad. El Olandes tranquilo á la orilla del mar, por lo comun mas alto que él, ha conseguido sujetarle; el Italiano en sus climas afortunados lucha todavía con los rios que los fertilizan. Los hechos hacen patente que la Astronomía no ha hecho progresos en los climas hermosos donde ha sido adoptada. La razon es que allí los astros no son ni buscados ni deseados; son objetos de todos los dias, ó, por mejor decir, de todas las noches. El hábito es causa de la indiferencia y del olvido; la naturaleza lo ha todo compensado, la facilidad con la pereza, la dificultad con la obstinacion y la eficacia del ingenio. El Indio guarda como un tesoro las tablas astronómicas construidas en climas menos ásperos, pero no las rectifica por el cielo al qual piensa

po-

poco. El Persiano vá á dormir en aquellas azoteas, donde la atmósfera siempre quieta, causa un fresco apacible y saludable, donde el cielo convida á velar con la pureza de su azul, con la multitud de sus puntos resplandecientes. Una esfera brillante no le causa sin embargo ni distraccion ni desvelo, mientras el Europeo, especialmente el Europeo del norte, lucha con la inclemencia de las estaciones, multiplica los trabajos y los conatos por un gozo momentaneo, espía el instante en que se abren las nubes, coge la verdad á hurtadillas, y lee en el libro de la naturaleza á hurtadillas, del mismo modo que se lee á la luz de los relámpagos.

„ Entremos en el observatorio, ya es de noche, sigamos las operaciones del observador; imitemos su silencio. Aquí no debe oirse mas que el débil ruido de la péndola; no se necesita mas movimiento que el de los astros; se contemplan menudamente las cosas, se quiere coger el instante pronto á escaparse para no volver nunca jamas: el pensamiento ha de estar inmobil, y el alma pegada al órgano de la vista. La figura, el tamaño, el lugar, el movimiento, la distancia de los astros, esto es lo que el Astrónomo se propone averiguar.

IN-

INDICE

De las materias que contiene este Tomo III.

Ex-

Teó-

PRIN-

PRINCIPIOS DE DINÁMICA.

1. ASI como los cuerpos que conocemos, indiferentes de suyo para moverse ó estarse quietos, nunca jamas se moverian si no fuera por el impulso de alguna causa, fuerza ó potencia que les comunica algun movimiento; tampoco nunca jamas dexarian de moverse, una vez sacados del estado de reposo, y se moverian eternamente, si no encontráran al tiempo de moverse, otros cuerpos con los quales chocan, cuyo choque destruye indefectiblemente su movimiento. Porque no hay en la naturaleza de los cuerpos, á lo menos no la alcanzamos, ninguna causa ó virtud que los haya de reducir al estado de reposo. Hay tambien circunstancias particulares en que la accion de un cuerpo en otro que se mueve, lejos de consumir su movimiento, le ocasiona todavía mayor. Son, pues, muchos los casos que ofrece á nuestra consideracion el movimiento de los cuerpos; pero sea la que fuere su multitud y variedad, todos juntos forman el obgeto de la ciencia conocida con el nombre de *Dinámica*, cuyo asunto es por consiguiente tratar del movimiento de los cuerpos en quanto le produce, aumenta ó destruye la accion mutua de unos en otros. Pero la voz Dinámica, tomada en el sentido comun en que nosotros la usarémos tambien, solo significa la ciencia que considera quanto pertenece al movimiento de los sólidos, es á saber, de todos aquellos cuerpos cuyas partes, moléculas, partículas ó partecillas tienen mucha adherencia unas con otras, y se resisten quando intentamos destruir su union.

De aquí se puede colegir quan vasto será el distrito de la Dinámica; pero como son tan ceñidos los

límites de esta obrita, ventilarémos en ella aquellos puntos no mas, que son el fundamento de la *Estática*, cuyo empeño es averiguar las circunstancias del movimiento y equilibrio de los cuerpos por medio de las máquinas. Los demas puntos de la Dinámica, aquellos por lo menos que ocupan un lugar señalado en la ciencia del movimiento de los cuerpos sólidos, los he tratado con alguna individualidad en el tom. IV de mis elementos.

2. Quando un cuerpo permanece en un mismo sitio decimos que está en reposo; pero quando pasa de un sitio ó lugar á otro, decimos que está en movimiento ó se mueve; su movimiento es tanto mayor, quanto menos tiempo gasta el cuerpo en pasar de un lugar á otro, ó quanto mas aprisa camina.

3. Toda causa ó *agente* que comunica movimiento á un cuerpo, ó destruye el movimiento que el cuerpo tenia, se llama *fuerza* ó *potencia*. El efecto de la fuerza, considerándole como existente en el agente, se llama *accion*, y considerándole como comunicado al cuerpo, se llama *impresion*.

4. El *equilibrio* es el estado de un cuerpo ó *sistema* ó agregado de cuerpos impelido de varias fuerzas, cuyos efectos son contrarestados de algunos obstáculos, ó se contrarestan mutuamente.

Leyes del movimiento.

5. Ley I. *Ningun cuerpo apetece de suyo el reposo ó el movimiento, y por lo mismo debe perseverar en su estado de reposo ó de movimiento, á no ser que le saque de él alguna causa exterior.*

Porque la materia es un ente inanimado, tan incapaz de darse movimiento á sí mismo, como de mudar en manera alguna el que acaso se le comunicó. La apariencia está por esta ley; pues consta que el mo-

movimiento de los cuerpos le aniquila la resistencia de los obstáculos con que tropiezan; por manera que conforme es menor esta resistencia, tambien dura mas el movimiento.

6. Ley II. *Las mudanzas ó variaciones que padece el movimiento de un cuerpo son proporcionales á la fuerza motriz, y se hacen en la linea recta, en cuya direccion obra dicha fuerza.*

La primera parte de esta proposicion es evidente de suyo. Eslo tambien la segunda; porque una vez que para el cuerpo es lo propio moverse ácia un lado que hácia otro, es preciso siga la direccion de la fuerza, ora le dé la fuerza un impulso no mas, ora le dé muchos succesivos. Una vez determinado el cuerpo á moverse en la direccion de la fuerza motriz, al movimiento que esta le comunicáre, se añadirá el movimiento que tuviere antes el cuerpo, si se le comunicase ácia el mismo lado; ó se le quitará, si la fuerza le impeliere hácia un lado opuesto; ó solo se le añadirá ó quitará una parte, si la fuerza le impeliere en una direccion oblicua respecto de la que seguia el cuerpo; en este último caso el cuerpo seguirá un rumbo que participará de las dos direcciones.

7. Ley III. *La reaccion siempre es igual y contraria á la accion.*

Todo cuerpo que solicita á otro, es tambien solicitado de este. Si yo empujo una piedra con el dedo, la piedra empuja al mismo tiempo mi dedo: si un caballo tira de una piedra por medio de una soga, tambien la soga tira del caballo, porque la cuerda que los une, y está tirante por ambos lados, hace tanta fuerza para arrastrar la piedra hácia el caballo, como para arrastrar al caballo hácia la piedra, y este conato tanto se opone al movimiento del uno como causa movimiento en el otro.

8. Síguese de esta ley que todo cuerpo se resiste

á mudar de estado, sea para pasar del movimiento al reposo, sea para pasar del reposo al movimiento, y opone una resistencia proporcional á su masa, esto es al número de sus partes.

Esta resistencia se llama *fuerza de inercia*, y corresponde á la materia por razon de su indiferencia para moverse ó estarse queda. Porque ya que ningun cuerpo puede pasar del movimiento al reposo, ó del reposo al movimiento (5), sino por la accion de una causa externa, y toda accion supone (7) una reaccion igual y contraria; síguese que el cuerpo se ha de resistir á mudar de estado. Y como no hay razon ninguna para que esta resistencia resida en unas moléculas del cuerpo y no en otras, es preciso que sea comun á todas las moléculas; luego la inercia total es igual á la suma de todas las inercias particulares, y es por lo mismo proporcional á toda la masa del cuerpo.

9. Algunos han querido decir que la fuerza de inercia es efecto de la gravedad de los cuerpos; pero la experiencia está manifestando que se equivocan de medio á medio. Supongamos un cuerpo que cae libremente á impulsos de su gravedad; si le damos con la mano para que cayga mas aprisa, experimentamos tambien resistencia. Pero esta resistencia no puede provenir de la pesantez, pues el impulso de la pesantez coadyuva al de la mano, lejos de serle contrario; luego la fuerza de inercia es una propiedad particular de la materia distinta de la gravedad.

La fuerza de inercia es un medio para que los cuerpos se comuniquen el movimiento unos á otros. No hay cuerpo que no se resista al movimiento; quando se resiste se le comunica, y se le comunica tanto cabalmente quanto pierde el cuerpo que le impele y choca.

Sentadas estas leyes, pasarémos á considerar las principales especies de movimiento, cuyo conocimiento es indispensable para los fines que llevamos; bien en-

entendido que en estas investigaciones prescindiremos de las varias resistencias que se oponen al movimiento ó equilibrio de los cuerpos, quales son el ayre, el rozamiento &c. dexando para despues llevar en cuenta los efectos de las que ocasionan diferencias esenciales en los resultados ó las consecuencias.

Del movimiento uniforme.

10. Llamamos *movimiento uniforme* el de un cuerpo que en tiempos iguales anda espacios iguales; por consiguiente *en el movimiento uniforme, los espacios han de ser proporcionales á los tiempos en que son andados*; y recíprocamente, *siempre que los espacios sean proporcionales á los tiempos, el movimiento será uniforme*. Luego si llamamos V la velocidad de un *mobil* ó cuerpo que se mueve, ó lo que es lo propio, si llamamos V el espacio que anda en la unidad de tiempo, pongo por caso en un segundo; y llamamos E el espacio proporcional que andaria en un número T de segundos, tendrémos $V : E :: 1 : T$, y por lo mismo $E = VT$, de cuya fórmula fundamental del movimiento uniforme, se saca $V = \frac{E}{T}$, y $T = \frac{E}{V}$; por manera que dadas dos de estas tres cantidades E, V, T, es facil de hallar la tercera.

11. Si llamamos u la velocidad de otro mobil en la unidad de tiempo; e, el espacio proporcional que andaria en un número t de segundos; será tambien (10) $u = \frac{e}{t}$; luego $V : u :: \frac{E}{T} : \frac{e}{t}$, de donde sacarémos $Eut = eVT$. Luego

12. 1.º *Las velocidades de dos móbiles movidos con movimiento uniforme, estan una con otra en razon directa de los espacios, y en razon inversa de los tiempos*; porque de la última equacion se saca $V : u :: Et : eT$.

Fig. 13. 2.° *Sus velocidades en tiempos iguales son proporcionales á los espacios*; porque si en la equacion antecedente borramos $t = T$, quedará $Eu = eV$, que dá $V : u :: E : e$.

14. 3.° *Si los espacios andados por los dos móbiles fueren iguales, sus velocidades serán recíprocamente como los tiempos.*

15. 4.° *Si los espacios fueren proporcionales á los tiempos, las velocidades serán iguales*; porque en este caso tenemos $E : e :: T : t$; $Et = eT$; luego $V = u$.

16. 5.° Pero *si los espacios estuvieren unos con otros en razon inversa de los tiempos, las velocidades estarán en razon inversa de los quadrados de los tiempos*; porque como por una parte tenemos $E : e :: t : T$, y por otra $E = VT$, y $e = ut$, sacarémos, con substituir, $VT : ut :: t : T$, y $VT^2 = ut^2$, de donde se saca $V : u :: t^2 : T^2$.

En el mismo supuesto tendrémos $V : u :: E^2 : e^2$, pues si por el supuesto $E : e :: t : T$, será $E^2 : e^2 :: t^2 : T^2$.

17. La equacion $Eut = eVT$ está diciendo, que *quando los móbiles se mueven uniformemente, los espacios que andan están en razon compuesta de los tiempos y las velocidades*. Luego si fueren iguales sus velocidades, los espacios serán como los tiempos; y recíprocamente, en tiempos iguales, los espacios serán proporcionales á las velocidades. Luego tambien serán iguales los espacios, siempre que las velocidades sean recíprocamente proporcionales á los tiempos.

Del movimiento uniforme compuesto.

1. 18. Figurémonos un cuerpo A quieto sobre un plano ACa que se mueve uniformemente en la direccion Aa, con tal velocidad que á cada unidad de tiempo anda un espacio igual á la linea Aa. Es constante, que

que este cuerpo respecto del plano ACa no tiene ningun movimiento, pero si un espectador inmobil que esté fuera de dicho plano mira al expresado cuerpo, le atribuirá un movimiento igual y paralelo con el del plano. Fig. 1.

Figurémonos ahora que una potencia qualquiera P obre en el cuerpo en la direccion PAC, dándole una velocidad con la qual pueda andar la linea AC en la unidad de tiempo; es constante que con este impulso que le es particular habrá de estar el cuerpo en el punto C, pasada dicha unidad de tiempo. Pero como en virtud del movimiento del plano, la linea AC camina con movimiento paralelo é uniforme ácia ac, y debe confundirse realmente con ac al cabo de una unidad de tiempo, es patente que los puntos C y c coincidirán, y por lo mismo el cuerpo A que participa del movimiento del plano, habrá de estar en c al cabo de la primera unidad de tiempo.

Del mismo modo probaríamos que al cabo de una parte qualquiera T de dicha unidad, el cuerpo A llevado de la misma velocidad AC andará un espacio proporcional $AB = T \times AC$ (10), entretanto que el movimiento comun lleva la linea AB paralelamente á ella misma á una distancia $Aa' = Bb = T \times Aa$. Esta linea coincide con $a'b$; y por consiguiente al cabo del tiempo T el cuerpo estará en b. Se viene á los ojos que todos los puntos b que determinaríamos discurriendo por el mismo término están en la misma diagonal Ac, porque $AB : Ab :: AC : Ac$; luego el cuerpo A trazará realmente la diagonal AC.

19. El movimiento del cuerpo á lo largo de la linea Ac ha de ser uniforme; porque $Ab : Ac :: AB : AC :: T \times AC : AC :: T : 1$; quiero decir, que $Ab : Ac$ como el tiempo gastado en andar Ab es al tiempo gastado en andar Ac. Luego el movimiento del cuerpo A en la direccion Ac siempre es uniforme (10).

Fig. 1. 20. Como un cuerpo en reposo sobre un plano mobil ó que se está moviendo tiene la velocidad del plano, es patente que si á un cuerpo que se mueve uniformemente con la velocidad *Aa* en la recta *QAa*, le comunica la potencia *P* una velocidad *AC* en la direccion *PAC*, trazará uniformemente la diagonal *Ac* de un paralelogramo cuyos lados son las lineas *Aa*, *Ac* que representan las velocidades del mobil en las direcciones *Aa*, *Ac*, representando la diagonal *Ac* su nueva velocidad.

21. Pero sea la que fuere la causa de la velocidad en la direccion *Aa*, podémos figurarnos que es efecto de una potencia *Q*, la qual obra en el mismo instante que la potencia *P*, y cuyo efecto se dirige por la *Ac*; y por ser estas dos potencias ó fuerzas proporcionales á las velocidades que comunicarian al mobil, si no obrasen ambas á un tiempo, las podemos substituir en lugar de estas mismas velocidades, y figurarlas del mismo modo que estas, en los lados de un paralelogramo, al qual llamarémos el *paralelogramo de las fuerzas*. De todo esto se deduce el principio siguiente de mucho uso en la Mecánica.

22. *Siempre que dos potencias obran á un tiempo en un mobil, ácia direcciones diferentes, el cuerpo anda la diagonal de un paralelogramo formado con sus direcciones, y cuyos lados tienen uno con otro la misma razon que las dos potencias una con otra.*

2. 23. Luego dos potencias *P* y *Q* figuradas en *AB* y *AC* obran el mismo efecto que una sola potencia figurada en *AD*, diagonal del paralelogramo *ABCD*. Por este motivo llamarémos *componentes* las potencias *P* y *Q*, y *derivada* ó *resultante* la potencia *R*. En este supuesto tendrémos $P : Q : R :: AB\ (=CD) : AC : AD$.

24. El triángulo *CAD* da por otra parte (Trigon.) $CD : AC : AD ::$ sen DAC : sen ADC : sen ACD :

sen

sen DAC : sen DAB : sen CAB (Trigon.); luego Fig.
$P : Q : R ::$ sen DAC : sen DAB : sen CAC, y esto sig- 2.
nifica que *una qualquiera de dos potencias componentes y su derivada siempre estan en la razon del seno del ángulo comprehendido entre las direcciones de las otras dos.*

25. Si los ángulos DAB, DAC fuesen infinitamente pequeños, sus senos se confundirán con los arcos que los miden; entonces tendremos, sen $(DAB + DAC)$ ó sen $CAB =$ sen $DAB +$ sen DAC, y por lo mismo $R = P + Q$. Luego, *quando dos potencias obran ácia una misma direccion, la derivada sigue la misma direccion que las componentes, y es igual á su suma. Si obráran en direcciones contrarias, la derivada seria igual á su diferencia.*

26. No solo sirve el principio sentado para hallar la derivada de dos potencias que obren en un mismo cuerpo, mas tambien para determinarla aun quando son muchas, sea el que fuere su número. Para cuyo fin se buscará primero la derivada de dos de ellas por el principio general; despues se comparará esta primera derivada con otra de las potencias componentes, de donde se sacará otra derivada, que representará ella sola las tres potencias componentes comparadas ya. Luego, comparando esta derivada con la quarta potencia componente, y prosiguiendo á este tenor, se sacará por último la derivada general.

27. Siguiendo un camino contrario, ó resolviendo una fuerza derivada, se hallarán las componentes de las quales se origina; y en muchos casos substituirémos en lugar de la derivada dos fuerzas que serán los lados de un paralelogramo cuya diagonal será la misma derivada. Esta composicion y resolucion de las fuerzas es muy fundamental en la Estática.

28. Quando las potencias que impelen un mismo cuerpo no obran en un mismo punto, tambien se puede averiguar su derivada. Desde luego se reparará que

Fig. que si el efecto de una potencia qualquiera *P* consis-
3. te en dar á todas las partes de un cuerpo *M* una misma velocidad, la qual las obligue á moverse en una direccion paralela á la de la potencia, conforme suponemos aquí, es indiferente que sea el que se quiera el punto de la direccion *K* donde obre esta potencia, sea por medio de una palanca, maroma &c. La única condicion esencial para que obre constantemente el mismo efecto, consiste en que sea siempre una misma su eficacia, sea el que fuere el punto de la recta *PK* donde obra.

4. Sentado esto, figurémonos tres potencias *P*, *Q*, *S* que obren á un tiempo en el cuerpo *M* en las direcciones *Pp*, *Qq*, *Ss* puestas en un mismo plano. Si prolongamos *Pp* y *Qq* hasta su punto de concurso *H*, nos podemos figurar que las potencias *P* y *Q* obran en *H*, y que su derivada seria *HK*, diagonal del paralelogramo cuyos lados son las lineas *HP*, *HQ* considerándolas como las velocidades que cada una de dichas potencias comunicaría separadamente al mobil.

Si prolongáramos igualmente la direccion de la derivada *HK* hasta encontrar en *I* la potencia *S*, nos podremos figurar que esta derivada obra en *I*, y está figurada en una linea *IL* igual con *HK*. Entretanto la potencia *S* obra por su parte con una fuerza que supondremos $= IS'$; solo falta, pues, concluir el paralelogramo *S'ILG* para sacar la derivada *IG* que buscamos. Luego el mobil tendrá una velocidad igual y paralela á *IG*, del mismo modo que si no hubiese experimentado mas impulso que el de una potencia figurada en esta última derivada.

29. Por este camino se puede hallar la derivada de quantas fuerzas se quieran, y tambien resolver una fuerza en otras muchas, con tal que concurran en ellas ciertas condiciones para que no sea indeterminada esta cuestion.

De

De las Fuerzas, y de la cantidad del movimiento. Fig.

30. Llamamos *masa* de un cuerpo la suma de las partes materiales de que se compone; pero todas las veces que usáremos esta voz, será para expresar el número de las partes materiales de que se considera compuesto un cuerpo.

Es la fuerza, segun llevamos dicho (3), la causa que mueve ó intenta mover un cuerpo. Como las fuerzas no se manifiestan sino por sus efectos, solo á estos hemos de atender quando las queramos medir. Y como el efecto de una fuerza consiste en comunicar á cada partícula material de un cuerpo cierta velocidad, se sigue que si á todas las partículas se les comunica una misma velocidad, como es natural suponerlo, el efecto de la causa motriz se medirá con la velocidad multiplicada por el número de las partes materiales del cuerpo, esto es, por la masa. Luego *la medida de una fuerza es igual al producto de la velocidad que puede comunicar á una masa conocida, multiplicada por la misma masa.*

31 El producto de la masa de un cuerpo por la velocidad se llama la *cantidad de movimiento de dicho cuerpo.* Luego si llamamos la fuerza F, la masa M, y la velocidad V, tendrémos $F = MV$.

De esta equacion nacen estotras dos $V = \frac{F}{M}$ y $M = \frac{F}{V}$; de las quales se infiere 1.° que dada la fuerza motriz de un cuerpo y su masa, se hallará la velocidad con que se mueve, partiendo la fuerza por la masa. 2.° Que dada la fuerza motriz y la velocidad, se hallará qual es la masa que puede tener dicha fuerza motriz y dicha velocidad, dividiendo la fuerza por la velocidad.

32 Por consiguiente, si f representa la fuerza motriz

Fig. triz de otra masa m, y u la velocidad de esta masa, sacarémos igualmente $f=mu$; luego $F:f::MV:mu$.

Y si de cada una de las dos equaciones $F=MV$, y $f=mu$, se sacan los valores de M y m, y despues los de V y u, se inferirá la razon de las masas por medio de la razon de las fuerzas y de las velocidades; y la razon de las velocidades por medio de la razon de las fuerzas y las masas.

33. Aquí nos toca prevenir que la masa ó el número de partes materiales de un cuerpo, pende de su volumen, y de la *densidad*. Como hay en los cuerpos muchos huecos llamados *poros*, la cantidad de su materia no es proporcional á su volumen; pero siendo uno mismo el volumen, hay tanta mas materia, quanto mas apretadas están las partes; y esta mayor ó menor *proximidad* de las partes es lo que llamamos *densidad*. Por manera que decimos de un cuerpo que es mas denso que otro, quando en volumen ó tamaño igual contiene el primero mas materia que el otro; y se dice que es menos denso, quando, siendo de un mismo volumen, contiene menos materia.

Sirve, pues, la densidad para formar juicio del número de las partes materiales quando es conocido el volumen; quando decimos que el oro es diez y nueve veces tan denso como el agua, queremos decir que en un mismo espacio contiene el oro diez y nueve veces tantas partes como el agua.

Si concebimos que la densidad expresa el número de partes materiales de un volumen determinado, que se toma por unidad de volumen; es evidente que para hallar la masa ó el número total de las partes materiales de un cuerpo cuyo volumen es conocido, se ha de multiplicar la densidad por el volumen. Si 19 representa v. gr. la densidad de una pulgada cúbica de oro, la cantidad de materia de 10 pulgadas cúbicas será 10 veces 19. Y por consiguiente, si M representa

en

en general la masa; S, el volumen ó la solidez; D, la densidad, tendremos $M = S \times D$. Fig.

34. Si llamamos m la masa de otro cuerpo; d, su densidad; s, su volumen, tambien será $m = s \times d$. Luego $M : m :: S \times D : s \times d$; *ó las masas están en razon compuesta de las densidades y los volúmenes.*

35. *Quando las masas son iguales, las densidades están en razon inversa de los volúmenes*; porque entonces $S \times D = s \times d$.; y por consiguiente $D : d :: s : S$.

36. Claro está que la densidad no es mas que una calidad respectiva; quiero decir, que no graduamos un cuerpo de denso sino porque le comparamos tácita ó expresamente con otro. No obstante, muchas veces hablamos como si representase la densidad una calidad absoluta; como quando decimos que *la densidad es igual al cociente de la masa dividida por el volumen, ó que la masa es igual al producto del volumen, por la densidad.*

Del movimiento uniformemente acelerado.

37. De lo dicho (6) se sigue que un cuerpo al qual se le da un impulso no mas ha de perseverar moviéndose con la misma velocidad del primer instante. Pero si se le da otro impulso en la misma direccion, ó en otra opuesta á la primera, se moverá con una velocidad igual á la suma ó á la diferencia de las dos velocidades que se le comunicaron succesivamente.

Luego, si concebimos que en intervalos de tiempo determinados reciba el cuerpo nuevos impulsos en la misma direccion, ó en otra opuesta á la primera, se moverá con un movimiento desigual ó *variado*, pues al principio de cada intervalo de tiempo será distinta su velocidad.

Como quiera, su velocidad al cabo de un tiempo qualquiera debe apreciarse por el espacio que entonces po-

Fig. podría andar en la unidad de tiempo, si llegase á ser uniforme su movimiento, contando desde el instante en que se considera dicha velocidad.

38. Toda fuerza que obra en un mobil para hacer que crezca su movimiento, se llama *fuerza aceleratriz*; y quando esta fuerza obra igualmente en intervalos de tiempo iguales, se llama *fuerza aceleratriz constante*. Si los impulsos de la fuerza se encaminaren á atrasar el movimiento del mobil, la fuerza se llamará *fuerza retardatriz*. Veamos quales son las circunstancias del movimiento uniformemente acelerado.

39. Ya que en este movimiento obra siempre de un mismo modo la fuerza aceleratriz; si llamamos g la velocidad que comunica en cada unidad de tiempo, es patente que las velocidades succesivas del mobil serán g, $2g$, $3g$ &c.; por manera que al cabo de un número t de unidades, la velocidad adquirida será g tomada tantas veces quantas unidades hubiere en t; quiero decir que será $g \times t$ ó gt.

40. Luego 1.° en el movimiento uniformemente acelerado los números de grados de velocidad que adquiere el mobil, crecen como los números de intervalos que dura el movimiento; ó *las velocidades adquiridas son como los tiempos corridos desde el principio del movimiento*. Por consiguiente, si llamamos u la velocidad que adquiere el mobil en el tiempo t, tendrémos $u = gt$.

2.° Las velocidades con que se halla succesivamente el mobil en cada uno de los intervalos consecutivos, forman, pues, una progresion arismética $\div g$. $2g$, $3g$ &c. cuyo último término es gt ó u, y cuyo número de términos es t ó igual al número de los impulsos de la fuerza aceleratriz.

3.° Y como cada una de estas velocidades g, $2g$ &c. es el espacio que puede andar el mobil en cada intervalo correspondiente (39), el espacio total andado

en

en el tiempo t, será la suma de los términos de esta progresion arismética; quiero decir que será $(g+u)\times\frac{t}{2}$. Luego si llamamos e este espacio total andado desde el principio del movimiento, tendrémos $e=(g+u)\frac{t}{2}$ Fig.

41. Figurémonos ahora que la fuerza aceleratriz obra sin interrupcion, ó lo que es lo mismo, supongamos el tiempo t dividido en una infinidad de partes infinitamente pequeñas que llamarémos instantes, y que al principio ó al fin de cada instante, la fuerza aceleratriz da un impulso al mobil. Figurémonos tambien que obra por instantes infinitamente pequeños. Con esto será g infinitamente pequeña respecto de u, y se podrá omitir, segun se ha demostrado en el cálculo diferencial, en la expresion $=(g+u)\frac{t}{2}$ la qual por lo mismo se reducirá á $e=\frac{ut}{2}$.

42. Supongámos ahora que al cabo del tiempo t dexe de obrar la fuerza aceleratriz, el cuerpo proseguirá (37) su movimiento con la velocidad u que hubiere adquirido; quiero decir que en cada unidad de tiempo andará un espacio $=u$ (10); luego si prosiguiera moviéndose con la misma velocidad todo el tiempo t, andaria un espacio $=ut$, esto es, duplo del espacio e ó $\frac{ut}{2}$, que hubiere andado (41) en un tiempo igual en virtud de los impulsos succesivos de la fuerza aceleratriz. Luego *en el movimiento acelerado uniforme y continuamente, el espacio andado en un tiempo resultado es la mitad del espacio que puede andar el mobil en el mismo tiempo con la velocidad adquirida, continuada uniformemente.*

43. Ya que las velocidades crecen (40) como los tiem-

Fig. tiempos, si llamamos p la velocidad adquirida en un segundo, la velocidad adquirida al cabo de un número t de segundos, será pt; será, pues, $u = pt$. La equacion $e = \frac{ut}{2}$ hallada poco ha, se transformará en $e = \frac{ptt}{2}$. Luego si representa E otro espacio andado del mismo modo en otro tiempo T, tambien será $E = \frac{pT^2}{2}$; de donde inferirémos $e : E :: \frac{ptt}{2} : \frac{pT^2}{2} :: tt : TT$, cuya proporcion está diciendo que los *espacios andados con un movimiento acelerado uniforme y continuamente son como los quadrados de los tiempos.*

44. Y como las velocidades son como los tiempos (40), *tambien serán los espacios como los quadrados de las velocidades.*

45. Luego (proporcion) *las velocidades y los tiempos son como las raices quadradas de los espacios andados desde el principio del movimiento.*

46. En la equacion $e = \frac{ptt}{2}$ (43), la cantidad p que, segun hemos supuesto, representa la velocidad que la fuerza aceleratriz puede comunicar con su impulso succesivo en un segundo, es lo que llamamos la fuerza aceleratriz; porque esta fuerza la hemos de apreciar por el efecto que es capaz de producir en el mobil en un tiempo determinado, cuyo efecto no es otro que darle cierta velocidad.

Del movimiento de los cuerpos pesados.

47. Llamamos *pesadumbre*, *pesantez* ó *gravedad* de los cuerpos la fuerza que los impele ácia abaxo por lineas verticales ó perpendiculares á la superficie de las aguas. Si fuera la tierra ó la superficie de las aguas perfectamente esférica, las direcciones de la pesantez concurririán todas en el centro. Pero aunque no sea es-

esta superficie perfectamente esférica, le falta tan poco para serlo, que respecto de los puntos que hemos de tratar, podemos suponer, sin error substancial, que las direcciones de la pesantez concurren todas en el centro de la tierra. Fig. I

Digimos en la Geometría práctica (I. 859) que el *radio* de la tierra considerada como esférica es de $7614466\frac{1}{3}$ varas, y que una distancia de 37 varas en su superficie, corresponde á un ángulo de un segundo en su centro. Así, en una máquina que tuviese 37 varas de largo, solo faltaría un ángulo de un segundo para que en sus extremos fuesen paralelas las direcciones de la pesantez. Por consiguiente, *en un mismo sitio se pueden considerar como paralelas las direcciones de la pesantez.*

Por lo que toca á la cantidad de esta fuerza, hablando con rigor, es distinta en las varias regiones, conforme estan mas ó menos apartadas de los polos de la tierra; y tambien crece ó mengua segun estan los cuerpos mas próximos ó mas distantes del centro de la tierra; pero la diferencia que se nota en ambas circunstancias es tan corta, que bien se puede despreciar en el asunto que aquí tratamos. Por lo que, mirarémos la pesantez como una fuerza que en todas partes es una misma, esto es, como una fuerza que en tiempos iguales impele los cuerpos ácia abajo con un mismo impulso.

Hemos de considerar esta fuerza como que obra igualmente cada instante en cada parte de la materia. Pero es constante que si cada una de las partes de un cuerpo recibe la misma velocidad, el total se moverá con la misma velocidad no mas que recibiria una sola de las partes separada de la masa; por manera que la velocidad que comunica la pesantez á una masa qualquiera, no pende de la cantidad de dicha masa; es la misma en una masa grande que en otra pequeña. Verdad es que no todos los cuerpos caen de una misma al-

Fig. tura en un mismo tiempo; pero la diferencia que en esto se nota es efecto de la resistencia del ayre; y así se observa que si se dexan caer en un espacio sin ayre cuerpos de masas diferentes, gastan el mismo tiempo en caer de alturas iguales.

48. Todo esto sentado, averiguarémos las leyes del movimiento de los cuerpos pesados.

Una vez que la gravedad obra igualmente y sin interrupcion á qualquiera distancia que esté el cuerpo del centro de la tierra (á lo menos respecto de las distancias á que nosotros podemos subir ó baxar), será la pesantez una fuerza aceleratriz constante, la qual comunica al mobil cada instante un nuevo grado de velocidad el qual siempre es uno mismo en cada instante igual. Luego (40) las velocidades adquiridas crecen como los tiempos corridos; los espacios andados se han como los quadrados de los tiempos (43), ó como los quadrados de las velocidades (44); las velocidades se han como las raices quadradas de los espacios andados (45); los tiempos se han tambien como las raices quadradas de los espacios andados; en suma, quanto hemos dicho de las fuerzas aceleratrices constantes, se aplica al pie de la letra á la pesantez. En todo prescindimos de la resistencia del ayre, y de otro obstáculo qualquiera.

Basta, pues, para poder determinar los tiempos, los espacios, y las velocidades del movimiento de los cuerpos graves, conocer un solo efecto de la pesantez en un tiempo determinado. Porque las equaciones $u = pt$, $e = \frac{ptt}{2}$ nos proporcionan determinar todos estos puntos, con tal que conozcamos el valor de p.

Representa p, segun llevamos dicho (43), la velocidad que adquiere el mobil al cabo de un segundo de tiempo. Consta por experiencia que un cuerpo al qual no opone el ayre una resistencia sensible, anda $15\frac{1}{10}$ pies

pies franceses, ó 15^p, 098 en el primer segundo de su caida. Fig.

Por otra parte dexamos probado (42) que con la velocidad adquirida en una serie de aceleraciones podria andar el mobil, moviéndose uniformemente, un espacio duplo en el mismo tiempo. Luego la velocidad que un cuerpo pesado ha adquirido al cabo del primer segundo de su caida es tal, que si la pesantez dexára de obrar en él, andaria el duplo de $15\frac{1}{10}$ pies, esto es, 30^p, 2 cada segundo. Luego $p = 30, 2$.

49. Ahora bien; de las dos equaciones $u = pt$, y $e = \frac{ptt}{2}$, la primera nos está diciendo que para hallar la velocidad que un cuerpo pesado ha adquirido despues de caer un número t de segundos, se ha de multiplicar la que adquiere en el primer segundo, por el número t de segundos.

Luego *despues que un cuerpo pesado ha caido cierto número de segundos, la velocidad que ha adquirido es tal, que si dexara de obrar la pesantez, andaria por segundo tantas veces* 30^p, 2, *quantos segundos hubieren corrido*. Así, un cuerpo cuya caida ha durado 7 segundos, se mueve al cabo de los 7 segundos con una velocidad, tal que con ella andaria 7 veces 30^p, 2 ó $211\frac{2}{5}$ pies por segundo, sin ninguna alteracion.

50. La segunda equacion $e = \frac{ptt}{2} = \frac{1}{2}ptt$ está diciendo que para hallar el espacio e, ó la altura e de la qual cae un cuerpo pesado en un número t de segundos, se ha de multiplicar $\frac{1}{2}p$, esto es, lo que anda en el primer segundo de su caida, por el quadrado del número de segundos.

Luego *la altura de que cae un cuerpo grave en un número* t *de segundos, es tantas veces* $15\frac{1}{10}$ *pies, quantas unidades hay en el quadrado de dicho número de segundos*. Así, quando un cuerpo ha gastado 7 segundos

Fig. en caer, se puede creer que ha caido de 49 veces 15, 1 pies, esto es, de 740 pies de alto con muy corta diferencia, en el supuesto de que no experimente por parte del ayre ninguna resistencia.

51. Si quisiésemos averiguar qué tiempo necesitará un cuerpo para caer de una altura conocida; la equacion $e = \frac{1}{2}ptt$ dá $tt = \frac{e}{\frac{1}{2}p}$ y por consiguiente $t = \sqrt{\frac{e}{\frac{1}{2}p}}$; esto quiere decir que habriamos de buscar quantas veces la altura $\frac{1}{2}p$ de que cae un cuerpo grave en el primer segundo cabe en la altura e, y sacar la raiz quadrada de este número de veces.

52. Averigüemos de qué altura ha de caer un cuerpo pesado para adquirir una velocidad conocida, esto es, una velocidad con la qual pueda andar un número determinado de pies por segundo. De la equacion $u = pt$, sacarémos $t = \frac{u}{p}$, substituirémos este valor de t en la equacion $e = \frac{1}{2}ptt$, y sacarémos $e = \frac{1}{2}p \times \frac{u^2}{pp} = \frac{u^2}{2p}$, cuyo valor nos está diciendo que para hallar la altura e de la qual deberia caer un cuerpo pesado para adquirir la velocidad u de cierto número de pies por segundo, hemos de partir el quadrado de dicho número de pies por el duplo de la velocidad con que se halla un cuerpo pesado al cabo del primer segundo, esto es, por 60, 4 (48).

Así, para determinar de qué altura debe caer un cuerpo pesado para adquirir una velocidad de 100 pies por segundo, partirémos $(100)^2 = 10000$ por 60, 4; el cociente $165\frac{1}{2}$ manifestará que la altura que buscamos es de $165\frac{1}{2}$ pies.

53. Prevenimos que el efecto de la pesantez y el efecto del peso son dos cosas distintas. El efecto de la pesantez consiste en comunicar ó procurar comunicar á cada parte de la materia cierta velocidad la qual en ma-

ne-

nera alguna pende del número de las partes materiales; Pero el peso es igual á la fuerza que hemos de hacer para impedir que una masa propuesta obedezca el impulso de su pesantez. Esta fuerza pende de dos cosas; es á saber, de la velocidad que la pesantez intenta comunicar á cada parte, y del número de las partes que mueve ó intenta mover. Y como la velocidad que la pesantez comunica es la misma respecto de cada parte de la materia, la fuerza que hemos de hacer es proporcional al número de las partes de la materia, esto es, á la masa. Por consiguiente el peso pende de la masa, pero no la pesantez; y podemos decir que *la masa es proporcional al peso.* Fig. I

54. El peso de un cuerpo, considerándole sin atender á su volumen, se llama *peso absoluto*, ó mas comunmente pesantez, ó *gravedad específica* de dicho cuerpo.

55. Pero muchas veces se ofrece saber quanto pesa una materia propuesta en un volumen dado, cuyo peso se llama *gravedad específica* de dicha materia. Esto manifiesta que en general la gravedad específica de un cuerpo es la razon que hay entre el número de las medidas del peso absoluto de dicho cuerpo, y el número de las medidas de su volumen; ó lo que viene á ser lo mismo, el *peso comprehendido en la unidad de volumen.*

56. De aquí se sigue que si los pesos absolutos de dos cuerpos fuesen P y P', sus gravedades específicas p y p', sus volúmenes S y s, tendrémos $p : p' :: \frac{P}{S} : \frac{P'}{s}$; de donde sacarémos $P : P' :: Sp : sp'$; esto es, que *las gravedades absolutas estan unas con otras en razon compuesta de los volúmenes, y de las gravedades específicas.*

57. *Quando las gravedades absolutas son iguales, las gravedades específicas estan en razon inversa de los volúmenes*; porque entonces $Sp = sp'$, y por consiguiente $p : p' :: s : S$.

Fig. 58. Quando decimos que la gravedad específica es igual al cociente de la gravedad absoluta dividida por el volumen, que la pesantez absoluta es igual al producto del volumen por la gravedad específica, estas expresiones se han de entender en el sentido que hemos declarado (36). Esto aclara una expresion muy corriente en la Matemática que usarémos alguna vez. Quando se nos ofreciere representar el peso absoluto de un cuerpo cuyo volumen fuere conocido ó determinable, en virtud de las condiciones de alguna cuestion, reducirémos dicho volumen á medidas conocidas, pongo por caso á pies cúbicos, y multiplicarémos el número de pies cúbicos de que constáre por el peso absoluto de un pie cúbico de la misma materia (cuyo peso considerarémos como su gravedad específica), con esto sacarémos evidentemente el peso absoluto del cuerpo propuesto: entonces dirémos que dicho peso es igual al producto de su pesantez específica por su volumen. Una vez escogido de este modo el volumen que ha de servir para medir la gravedad específica, se deberá usar la misma unidad en todas las comparaciones que se hicieren entre los pesos absolutos de diferentes cuerpos, respecto de un mismo asunto.

59. Por ser las masas proporcionales (53) á sus pesos, las densidades son proporcionales á las gravedades específicas; porque las densidades son masas comprehendidas en volúmenes iguales, y las gravedades específicas tambien son pesos comprehendidos en volúmenes iguales.

De los Momentos.

60. Llamamos *momento* de una potencia el producto de dicha potencia por la distancia de su direccion á un punto fijo arbitrario.

5 y 6. 61. Si desde un punto fijo *M* que está en el plano del paralelogramo *ABDC*, bajamos á la diagonal *AD*

y á cada uno de sus lados AB, AC, prolongados si fue- Fig.
re menester, las perpendiculares respectivas MP MP', 5.
MP'', y llamamos el ángulo BAD, a; el ángulo DAC, b; AP, x; MP, y; MP', y', y MP'', y''.

Tendrémos desde luego el ángulo $MAP' = MAP - a$; luego sen MAP' ó $\frac{y'}{AM}$ = sen MAP cos a — sen a cos $MAP = \frac{y}{AM}$ cos $a - \frac{x}{AM}$ sen a; luego $y' = y$ cos $a - x$ sen a.

Tendrémos despues el ángulo $MAP'' = b + MAP$, de donde sacarémos igualmente $y'' = y$ cos $b + x$ sen b. Si eliminamos x en estas dos equaciones, sacarémos y'' sen $a + y'$ sen $b = y$ (sen a cos b + sen b cos a) $= y$ sen $(a+b)$. Pero (24) sen a: sen b : sen $(a+b)$ :: AC : AB : AD; luego $AD \times MP = AB \times MP' + AC \times MP''$.

6. Si el punto M estuviere entre los lados del ángulo BAD, la MP' será negativa; y los dos casos estarán cifrados en la misma equacion con escribirla de este modo $AD \times MP = AC \times MP'' \pm AB \times MP'$.

7. 62. Síguese de aquí que dos potencias P y Q y su derivada R se pueden figurar siempre que se quiera en los lados y la diagonal del paralelógramo $ABCD$; si desde un punto qualquiera M que esté en el plano de dicho paralelogramo, se tiran perpendiculares á las direcciones de estas tres fuerzas, el producto de la derivada por la perpendicular MP (que mide la distancia de su direccion al punto M) es igual á la suma, ó á la diferencia de los productos respectivos de las dos potencias por las perpendiculares MP', MP'' tiradas desde el punto M á sus direcciones.

Será igual á la suma de estos dos productos, siempre que el punto M esté fuera del ángulo BAD; y será igual á la diferencia, siempre que el punto M esté dentro del expresado ángulo. Y como estos productos son respectivamente los momentos de las dos

Fig. potencias componentes, y el otro producto es el momento de su derivada, sacarémos por consecuencia general que *el momento de una derivada qualquiera es igual á la suma ó á la diferencia de los momentos de las dos componentes, segun se tome el punto fijo fuera ó dentro del ángulo que forman las direcciones de las dos potencias.*

63. Distinguirá facilmente estos dos casos el que se figurare el plano del paralelogramo de las fuerzas
7. asegurado de tal modo en el punto *M*, que solo pueda dar vueltas al rededor de este punto. Porque si entonces el punto *M* estuviere fuera del ángulo *BAD* que forman las dos potencias, obrarán estas para que el plano, y todo el sistema de las lineas que en él estan trazadas, gire en la misma direccion. Pero si dicho punto estuviere dentro del ángulo *BAD*, las dos potencias obrarán para hacer que gire el sistema en direcciones encontradas. Se puede, pues, decir que el momento de la derivada es igual á la suma ó á la diferencia de los momentos de las dos componentes, conforme estas obren para que gire el sistema en la misma direccion ó en direcciones encontradas.

64. En general, *sean quantas fueren las potencias componentes, y sus direcciones las que se quiera, el momento de su derivada siempre será igual á la suma de los momentos de las componentes que procuran hacer girar en una direccion, menos la suma de los momentos de las que procuran hacer girar en direccion contraria.*

Aunque esta proposicion se infiere de lo demostrado poco há, la probarémos de otro modo. Dos qualesquiera de las potencias componentes tienen una derivada particular, cuyo momento es igual á la suma ó á la diferencia de sus momentos de ellas. Combinada esta derivada con otra componente, dá otra derivada cuyo momento es igual á la suma ó á la diferencia de las tres primeras componentes, y así de las de-

demas. Luego el momento de la derivada general es igual á la suma ó á la diferencia de los momentos de las componentes; ó, lo que viene á ser lo propio, el momento de la derivada general es igual á la suma de los momentos que procuran hacer girar en una direccion, menos la suma de los momentos que procuran hacer girar en una direccion contraria. Fig.

65. Luego, *si el punto fijo* M *está en la derivada, la suma total de los momentos de las componentes es igual á cero*: quiero decir, que entonces la suma de los momentos de las fuerzas que procuran hacer girar en una direccion, es igual á la suma de los momentos de las que procuran hacer girar en una direccion contraria.

66. Todo esto sentado, vamos á declarar como sirven los momentos para la resolucion de las fuerzas, considerando primero dos fuerzas, y suponiendo que 8.
obran en un mismo plano. Sean, pues, P y Q las dos potencias; M, el punto fijo, al qual referirémos sus momentos. Si tiramos la perpendicular $Mprq$, y suponemos que las dos potencias obren en una misma direccion, tendremos generalmente $R \times Mr = P \times Mp + Q \times Mq$. Si tomáramos los momentos respecto de otro punto fijo m de la misma linea Mq, tendríamos tambien $R.mr = P.mp + Q.mq$; restando esta última equacion de la primera sacaremos $(Mr - mr)R = (Mp - mp)P + (Mq - mq)Q$, ó, porque $Mr - mr = Mm$, $Mp - mp = Mm$, $Mq - mq = Mm$, saldrá $Mm.R = Mm.P + Mm.Q$, de donde se saca, dividiendo por Mm, $R = P + Q$.

67. Luego la derivada de las fuerzas paralelas que obran en una misma direccion, es igual á su suma de ellas.

68. Del mismo modo probaríamos que la derivada de las que obran en direcciones contrarias, es igual á su diferencia, aun quando el punto fijo desde el qual se

Fig. 8. se toman los momentos, no está, como en el último caso, fuera del intervalo que separa las direcciones de las fuerzas. Porque si bien quando está, como el punto O, entre dichas direcciones, no puedan P y Q obrar ácia direcciones contrarias, sin que intenten hacer girar la linea pOq ácia una misma direccion, no por eso dexa de ser la derivada igual á su diferencia. Este último caso nos enseña que no es lo mismo procurar hacer girar ácia la misma direccion que obrar en una misma direccion.

69. Síguese de aquí que si el punto M coincidiere con el punto p, será $R.pr$, ó $(P+Q).pr = Q.pq$, de donde sacarémos $P.pr+Q.pr=Q.pq$, ó $P.pr=Q.pq-Q.pr$, ó $P.pr=Q.qr$, y $P:Q::qr:pr$; quiero decir que *cada fuerza sigue la razon inversa de su distancia á su derivada.* Lo propio sacaríamos si tomáramos los momentos desde el punto r de la derivada.

70. Ya que en el caso propuesto tenemos estas dos equaciones $P.pr.=Q.qr$, y $R.pr=Q.pq$ las quales dan la primera $P:Q::qr:pr$, y la segunda $Q:R::pr:pq$, tendremos $P:Q:R::qr:pr:pq$; inferiremos 1.° que todos los puntos r de la derivada estan respectivamente á iguales distancias de los puntos que les corresponden en las direcciones de las dos componentes. Luego *la derivada es entonces paralela á las direcciones de las componentes*; pues lo que acabamos de probar del punto r de la derivada, lo probaríamos igualmente de otro punto qualquiera de su direccion.

2.° Podemos figurar qualquiera de las potencias P, Q, R en la linea comprehendida entre las direcciones de las otras dos. Si figuramos v. gr. P en qr, la pr representará Q, y la pq representará R.

3.° Dadas las potencias P y Q con sus direcciones, será facil de hallar, siempre que se quiera, el punto

r, por donde ha de pasar la derivada, por medio de Fig.
la equacion $(P+Q)pr=Q.pq$, que da $pr=\frac{Q.pq}{P+Q}$ igual á la distancia que se pide.

71. Supongamos ahora un número qualquiera de fuerzas paralelas, que obren todas en un mismo plano. Es patente que su derivada será igual á la suma de las que obran en una direccion, menos la suma de las que obran en una direccion contraria. Y como el momento de esta derivada es igual (64) á la suma de los momentos de todas las componentes, la distancia de su direccion á un punto dado se determinará dividiendo la suma de los momentos de las componentes por la derivada, ó lo que es lo propio, por la suma de las fuerzas. Pero siempre se deberá tener presente que si algunas de las fuerzas propuestas procuraren hacer girar el sistema en direccion contraria, se deberán tomar sus momentos con signos negativos; y si alguna de ellas obrase en direccion contraria respecto de las demas, se le dará tambien signo negativo en la suma de las fuerzas.

72. Supongamos ahora que las fuerzas, estando 9.
todas en un mismo plano, no sean paralelas unas con otras, y que son quatro P, Q, S, T, figuradas en las direcciones obliquas Pp, Qq, Ss, Tt, las quales señalan sus direcciones. Tomemos en el plano de estas fuerzas un punto C, por el qual tiraremos las perpendiculares CP'', Cp''. Hecho esto, resolverémos cada fuerza como Pp, en otras dos PP', Pp' respectivamente paralelas á estas perpendiculares, tendremos en todo ocho fuerzas, quatro de las quales serán paralelas á CP'', y las otras quatro á Cp''.

Pero la derivada de estas obra de arriba abajo, y su valor es $TT'+SS'+QQ'-PP'$. Por lo que mira á su direccion, se puede determinar por su distancia á

Fig. 9. á la linea Cp'', y hallarémos que la expresion general de esta distancia es $\frac{SS'.Ss''+QQ'.Qq''-PP'.Pp''-TT'.Tt''}{TT'+SS'+QQ'-PP'}$.

La derivada de las fuerzas paralelas á CP'' obra de la derecha á la izquierda, su valor es $Tt'+Ss'-Qq'-Pp'$, y la distancia de su direccion á la linea CP'' es

$$\frac{Tt'.TT''+Ss'.SS''-Qq'.QQ''-Pp'.PP''}{Tt'+Ss'-Qq'-Pp'}$$

Si figuramos en CR'' la distancia de la primer derivada á la linea Cp'', y en Cr'' la distancia de la otra á la linea CP'', y concluimos el rectángulo $R''\,Cr''\,R$, será RR'' la direccion de la primer derivada, y $r''\,R$ la direccion de la segunda. Concurrirán, pues, estas dos direcciones en el punto de interseccion R; y por consiguiente, si tomamos por un lado $RR'=TT'+SS'+QQ'-PP'$, y del otro $Rr'=Tt'+Ss'-Qq'-Pp'$, se viene á los ojos que despues de concluido el paralelogramo $r'\,RR'\,r$, la diagonal Rr será finalmente el valor y la direccion de la derivada general que nos propusimos determinar.

Del Equilibrio.

73. El equilibrio consiste en los conatos recíprocos y opuestos con que potencias iguales obran unas contra otras y se contrarestan. Si un cuerpo se halla impelido de dos fuerzas de todo punto iguales, y directamente contrarias, no podrá menos de quedarse inmobil, pues no podrá obedecer el impulso de ninguna de las dos. En este caso, las fuerzas que le solicitan se equilibran ó forman equilibrio.

74. Si dos masas iguales movidas con una misma velocidad van al encuentro una de otra, se quedarán en reposo despues del choque ó encuentro; porque nin-

guna de las dos podrá preponderar. Aquí suponemos Fig.
las masas sin elasticidad.

75. Lo propio sucedería si dos masas desiguales *M*, *m* fuesen al encuentro una de otra con velocidades *V*, *u*, recíprocamente proporcionales á *M* y *m*. Porque entonces serian iguales las cantidades de movimiento, se contrarestarian las dos fuerzas con conatos iguales, y habria forzosamente equilibrio.

76. Luego *dos cuerpos se equilibran, siempre que siendo contrarias sus direcciones, son iguales sus cantidades de movimiento.* Síguese de aquí

77. 1.° *Que quando unas potencias qualesquiera obran mutuamente unas contra otras, se han de equilibrar siempre que la suma de las que obran en una direccion es igual á la suma de las que obran en direccion contraria.*

78. 2.° *Luego habrá equilibrio entre potencias qualesquiera, sean las que fueren sus direcciones, quando su derivada fuere cero* (65).

Del Centro de Gravedad.

79. Una vez que la pesantéz obra igualmente (47) en todas las partes de la materia que componen una masa qualquiera, cada una de estas partes procura acercarse con igual conato al centro de la tierra. De todos estos conatos particulares juntos resulta el conato general con que todo el cuerpo procura acercarse al mismo centro, cuyo conato se llama el *peso* del cuerpo.

80. Es, pues, el peso de un cuerpo qualquiera igual á la cantidad de movimiento que la pesantéz procura comunicar incesantemente á dicho cuerpo; es por consiguiente proporcional á la masa, una vez que la velocidad de todas las partes es una misma.

Pero este peso solo le puede sostener una fuerza que

Fig. que sea por lo menos igual con él. Podemos por lo mismo considerarle como una potencia que obra perpendicularmente al orizonte. Luego pueden compararse unos con otros dos ó muchos pesos, y contrarestarse del mismo modo que todas las demas fuerzas mecánicas.

La adherencia que une unas con otras todas las partes de un mismo cuerpo es causa de que no puede una de ellas obedecer el impulso de la pesantéz, sin que le obedezcan igualmente todas las demás. Luego ya que las direcciones en que las impele la gravedad son todas paralelas (47), su derivada debe pasar por algun punto intermedio, que es en algun modo el punto de reunion, ó céntrico de todas las fuerzas particulares. Este punto único en cada cuerpo es el que llamamos *centro de gravedad.*

81. Y como en estándo sosténido este punto, se mantiene forzosamente el cuerpo en equilibrio, porque entonces la derivada es cero (78); recíprocamente, no puede estar ningun cuerpo en equilibrio quando no está sostenido dicho punto. Porque por falta de apoyo surtirá su efecto la derivada, y el cuerpo se vendrá abajo. Inferamos, pues, que *el centro de gravedad de un cuerpo es un punto en el qual nos figuramos que se reconcentra todo el peso de dicho cuerpo, de modo que con tal que esté sostenido este punto no mas, se sostiene el cuerpo en equilibrio en todos los casos.*

82. Tambien podríamos decir que el centro de gravedad de un sistema qualquiera de cuerpos es un punto por donde pasa la derivada de todas las fuerzas que la pesantéz comunica á cada parte del sistema, sea la que fuere la situacion de dichos cuerpos.

83. Para determinar este punto, basta colocar el sistema en dos situaciones diferentes, y determinar en cada una la direccion de la derivada; porque si prolongamos estas dos direcciones, se encontrarán indefec-

fectiblemente, y su punto de concurso será el centro de gravedad que se busca. Quedará probado con demostrar que en otra situacion qualquiera del sistema la derivada siempre pasará por este punto de concurso. Con esta mira consideraremos muchos cuerpos *M*, *P*, *Q*, sea el que fuere su número, puestos sobre una *linea* recta que supondremos inflexible, y sin masa; y para simplificar todavia mas esta investigacion, considerarémos estos cuerpos como otros tantos puntos donde están reconcentradas sus masas. Sea *g* la velocidad que la gravedad les comunica en un tiempo determinado, pongo por caso en un segundo, en las direcciones de las lineas *Mm*, *Pp*, *Qq* perpendiculares al orizonte; serán *Mg*, *Pg*, *Qg*, las cantidades de movimiento. Una vez que podemos considerar estas fuerzas como potencias aplicadas en los puntos *M*, *P*, *Q*, paralelas entre ellas, tomarémos á arbitrio en la prolongacion de *QM*, un punto *C* por el qual tirarémos la recta *Cm′ p′ q′* perpendicular á sus direcciones. Fig. 10.

Sentado esto, sacarémos la distancia *Cr′* á la direccion de la derivada, haciendo (71) $Cr' = \frac{Mg.Cm'+Pg.Cp'+Qg.Cq'}{Mg+Pg+Qg} = \frac{M.Cm'+P.Cp'+Q.Cq'}{M+P+Q}$, de donde sacarémos por la naturaleza de las lineas proporcionales, $CR = \frac{M.CM+P.CP+Q.CQ}{M+P+Q} =$ á la distancia del centro de gravedad *R* al punto *C*. Como este valor de *CR* no pende en manera alguna de la oblicuidad de la linea *MQ* respecto de la orizontal, síguese que la derivada de este sistema ó conjunto de cuerpos, siempre pasará por el centro de gravedad que acabamos de determinar, sea la que fuere la situacion del sistema.

84. Síguese de aquí que *si hubiese muchos cuerpos colocados sobre una misma linea, se hallará la distancia del centro de gravedad á un punto qualquiera de dicha*

Fig. *cha linea, multiplicando cada masa por la distancia á dicho punto, y dividiendo la suma de los productos por la suma de las masas, ó, lo que es lo propio, dividiendo la suma de los momentos por la suma de las masas.*

Por consiguiente, si llamamos *momento* el producto de una masa qualquiera por su distancia á un punto ó á una linea, se sacará, siempre que se quiera, la distancia de dicho punto ó linea al centro de gravedad, dividiendo la suma de los momentos por la suma de las masas.

85. Si hubiese cuerpos en ambos lados del punto fijo, en lugar de la suma de los momentos se debería tomar la diferencia de las sumas de cada lado. Y si todos los cuerpos cuyo centro comun de gravedad se busca fuesen homogeneos, y de una densidad uniforme, segun lo supondrémos en adelante, se podrán substituir sus volúmenes en lugar de sus masas.

86. Declaremos ahora cómo se halla el centro comun de gravedad de muchos cuerpos, que si bien estan en un mismo plano, no estan en una misma linea.

11. Supongamos tres cuerpos M, P, Q, considerándolos como puntos en los quales se reconcentran sus conatos procedentes del impulso de la pesantéz, dispuestos en triángulo en un mismo plano. Si tiramos por un punto qualquiera C de dicho plano una recta orizontal Cp, y una recta vertical Cp', podremos tirar desde cada punto pesado perpendiculares á cada una de estas dos rectas. Por medio de estas dos rectas averiguarémos facilmente que la derivada de este sistema triangular, considerado en su posicion actual, pasará á una distancia $Rr' = \frac{M.Mm'+P.Pp'+Q.Qq'}{M+P+Q}$, y si suponemos que todo el sistema dé un quarto de conversion, de modo que la orizontal Cp llegue á ser vertical, hallarémos tambien que en esta nueva posicion la derivada

pa-

pasará á una distancia $Rr = \frac{M.Mm+P.Pp+Q.Qq}{M+P+Q}$. Quedará, pues, determinado el centro de gravedad R; nos falta probar que en otra situacion qualquiera del sistema, la derivada pasará por el mismo punto. Fig.

Hemos visto (65) como la suma de los momentos respecto de un punto qualquiera de la derivada es cero, por manera que podemos asegurar que está en la direccion de la derivada todo punto respecto del qual es nula la suma de los momentos. Luego si fuere AB 12.
la derivada de un sistema qualquiera en una situacion, y en otra situacion, perpendicular á la primera, la derivada fuere CD perpendicular á AB, nos basta probar que la derivada en otra posicion qualquiera ha de pasar forzosamente por su punto de concurso G, ó, lo que es lo propio, que la suma de los momentos respecto de otra derivada qualquiera EF es cero.

87. Sea, pues, M uno de los puntos pesados del sistema, desde el qual se tiren las MP, MQ, MR respectivamente perpendiculares á los tres eges que representan las tres derivadas. Será el ángulo $PGM = PGQ - MGQ$, y por consiguiente (tom. II.) sen $PGM =$ sen PGQ cos MGQ — sen MGQ cos PGQ; de donde sacarémos $\frac{MP}{GM} =$ sen $PGQ . \frac{GQ}{GM}$ — cos $PGH . \frac{MQ}{GM}$; esto dá $PM =$ sen $PGQ . MR$ — cos $PGQ . MQ$. Tomando, pues, el momento del punto M desde el ege EF, tendremos $M . PM =$ sen $PGQ . M . MR$ — cos $PGQ . M . MQ$, y la suma de los momentos $S . M . PM =$ sen $PGQ . S . M . MR$ — cos $PGQ . S . M . MQ$. Pero por ser AB y CD dos derivadas, la suma de los momentos de M respecto de ellas ha de ser nula (65); luego $S . M . MR = 0$, y $S . M . MQ = 0$, de donde se saca por último $S . M . MP = 0$; luego la suma de los momentos, tomándolos respecto de otra derivada EF es cero. Luego esta derivada siempre pasa por el cen-

Fig. tro de gravedad que la interseccion de las otras dos determina.

Determinacion del Centro de Gravedad de las lineas de las superficies, y de los sólidos.

13. 88. Cuestion I. *Determinar el centro de gravedad de una linea* AB *uniformemente pesada.*

La supondremos dividida en una infinidad de partes como *Pp*; multiplicarémos (84) cada una de ellas por su distancia á un punto fijo, pongo por caso por la distancia á que está del punto *A*; tomarémos la suma de estos productos, y la dividiremos por la suma de las partes *Pp*, ó por toda la linea *AB*.

Llamemos, pues, *AB*, a; *AP*, x, será $Pp = dx$; el momento de *Pp* será xdx, é integrando sacarémos $\frac{x^2}{2}$ que será la suma de los momentos. Para sacarla respecto de toda la linea, hemos de suponer $x = a$; será, pues, $\frac{a^2}{2}$ la suma total de los momentos; y dividiéndola por la suma a de las masas, saldrá el cociente $\frac{a}{2}$, que espresará á qué distancia está del punto *A* el centro de gravedad de la linea *AB*. Por consiguiente el centro de gravedad de una linea *AB* uniformemente pesada está en su punto del medio.

14. 89. Cuestion II. *Hallar á qué distancia está de la linea* TT *que pasa por el centro, y es paralela á la cuerda, el centro de gravedad de un arco de círculo* NBn.

Llamarémos a el radio del círculo propuesto; *AI*, x; *IN*, y; *BN*, u, y será $PI = dx$. En estos supuestos será $2xdu$ la expresion de los momentos de los arcos *nM*, *Nm* respecto de la recta *TT*. Pero de lo

di-

dicho (*cal. dif.*) consta que $du = \frac{ady}{x}$; ó $xdu = ady$, Fig. 14.
y $2xdu = 2ady$. Luego (84) si dividimos la suma de los momentos $S.2xdu = S.2ady = 2ay$ por la suma de los elementos $S.2du = 2u$, será $\frac{2ay}{2u}$ la distancia que buscamos.

90. Luego $2u : 2y = Mm :: a : AI$ que es la distancia que buscábamos; quiero decir, *que un arco es á su cuerda, como el radio es á la distancia del centro de gravedad del mismo círculo á su centro.* Si el arco fuese una semicircunferencia, tendremos *la semicircunferencia es al diámetro, como el radio es á la distancia del centro de gravedad del arco al centro del círculo.* Si el arco fuese toda la circunferencia, será $y = 0$, y $\frac{2ay}{2u} = 0$, y quiere decir, que el centro de gravedad de la circunferencia está en el centro mismo del círculo.

91. Cuestion III. *Hallar el centro de gravedad de un triángulo* ABC. 15.

Por el vértice del triángulo tirarémos la linea GB paralela á la basa AC. Tambien tirarémos la linea $BF = c$, perpendicular á la base, y la linea $BD = a$, que divide la base en dos partes iguales. Y suponiendo las lineas MN, rs paralelas á la base, haremos $AC = b$, $BP = x$, $Pp = dx$. Por ser paralelas las lineas AC, MN, es patente que las alturas de los triángulos ABC, MBN siguen la razon de las bases AC y MN; luego $c : b :: x : MN = \frac{bx}{c}$; multiplicando MN por dx, sacarémos el elemento $MNrs = \frac{bx}{c}.dx$. Si multiplicamos este elemento por su distancia x á la linea BG, sacarémos (60) el momento de este elemento, $= \frac{bx^2dx}{c}$, y

Fig. 15. será $\frac{bx^3}{3c}$ la suma de los momentos de los elementos del triángulo *BMN*. Si dividimos esta suma por la de los elementos, ó por $S.\frac{bxdx}{c}=\frac{bx^2}{2c}$, el cociente $\frac{2}{3}x$ expresará (84) la distancia del centro de gravedad del triángulo *BMN* á la linea *GB*. Si hacemos $x=c$, el centro de gravedad del triángulo *ABC* distará de *B* la distancia $BP=\frac{2}{3}c$.

Como la linea *BD* parte por medio la base *AC*, tambien partirá por medio las lineas *MN*, *rs*; luego se viene á los ojos que dicha linea parte por medio los elementos del triángulo; luego el centro de gravedad de los elementos está en esta linea. Pero los triángulos semejantes *BDF*, *BLP* dan $BF:BP::BD:LB$, ó $c:\frac{2}{3}c::a:LB=\frac{2}{3}a$. Luego si desde el vértice de un triángulo qualquiera tiramos una linea que parta por medio el lado opuesto ó la base del triángulo, el centro de gravedad del triángulo estará en dicha linea, y $\frac{1}{3}$ de dicha linea lejos de la base.

92. Si hubiéramos de determinar el centro de gravedad de un quadrilátero *ABEC*, buscaríamos los centros de gravedad *I* y *L* de los triángulos *BEC*, *BAC*, tiraríamos la *IL*, y dividiéndola en *H* en razon inversa de las areas de los triángulos (69), sería el punto *H* el centro de gravedad del quadrilátero.

Si el quadrilátero fuese un paralelógramo, tiraríamos la linea *DG* por el centro de gravedad de las bases del paralelógramo; es patente que esta linea partiría por medio los elementos del paralelógramo, y que el centro de gravedad estaría en medio de dicha linea. Lo propio sería si la figura *ABEC* fuese un prisma ó un cilindro.

93. Cuestion IV. *Hallar la distancia del centro de gravedad de un sector circular* AMBm *respecto del centro del sector.*

Ti-

Tirarémos los radios An, At infinitamente próximos al radio AM, y el centro de gravedad del triángulo AMn estará en la linea At que parte por medio la base Mn, cuya distancia respecto del vértice será $= \frac{2}{3} At = \frac{2}{3}a$, si llamamos At, a (91). Luego si nos figuramos el sector dividido en una infinidad de triángulos como este, todos ellos tendrán su centro de gravedad á la misma distancia del vértice A; luego si desde el punto A como centro, y con un radio $AF = \frac{2}{3}a$ trazamos un arco de círculo Ff, todos los centros de gravedad de dichos triángulos estarán en dicho arco; luego el centro de gravedad del sector será el mismo que el del arco Ff. Pero el centro de gravedad de un arco se determina (90) con decir: el arco es á la cuerda, como el radio es á la distancia del centro de gravedad del arco al centro del círculo; luego arco $FPf : Ff :: AF = \frac{2}{3}a : AC$; que es la distancia que buscábamos. Fig. 14.

94. Cuestion V. *Hallar la distancia del centro de gravedad de la superficie esférica* MAN, *engendrada por la revolucion del arco* AM *al rededor del diámetro* AB, *respecto del plano* TT *perpendicular al vértice del diámetro.* 16.

Llamarémos el diámetro AB, $2a$; la abscisa AP, x; la ordenada PM, ó rs, ó pm, y; porque estas ordenadas son iguales unas con otras, pues están infinitamente próximas. Por lo probado (*cal. dif.*) el arco elemental Mm será $= \frac{adx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$. Si nos figuramos que este arco gira al rededor del ege, el elemento de la superficie (*cal.dif.*) será $= \frac{c}{r} y \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{c}{r} y \frac{adx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$ $= \frac{c}{r} adx \frac{\sqrt{(2ax - xx)}}{\sqrt{(2ax - xx)}} = \frac{cadx}{r}$. Si multiplicamos este elemento por su distancia $AP = x$ al plano TT, el

Fig. 16. momento de este elemento será $=\frac{c}{r}axdx$. Si dividimos la suma $\frac{c}{2r}ax^2$ de los momentos por la suma $\frac{c}{r}ax$ de los elementos, hallarémos que la distancia que buscamos es $=\frac{1.x}{2}$; quiero decir, *que la distancia del centro de gravedad de una superficie esférica* MAN, *respecto del vértice* A *del diámetro, está en medio de la altura de la misma superficie.*

Si contáramos las abscisas desde el centro, y buscáramos el centro de gravedad de la zona, ó faxa *MFGN* respecto del centro *C*, tendríamos $CP=x$, y el elemento del arco del círculo (*cal.dif.*) $Mm=\frac{adx}{\sqrt{(aa-xx)}}$, $y=\sqrt{(aa-xx)}$, y la expresion del elemento de la zona sería $\frac{c}{r}y\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\frac{c}{r}adx$, el momento de este elemento sería $\frac{c}{r}axdx$, y la distancia que se busca $=\frac{\frac{c}{r}S.axdx}{\frac{c}{r}S.adx}=\frac{x}{2}$. Pero $CP=x$ es la altura de la zona; luego el centro de una zona esférica, comprehendida entre dos planos paralelos, que el uno pasa por el centro del círculo generador, está en medio de la altura de la zona.

17. 95. Cuestion VI. *Hallar la distancia del centro de gravedad de una semiparábola* AFD, *respecto de la tangente* AT *perpendicular á su ege.*

La equacion de la curva es $x=y^2$, en el supuesto de ser AP, x; PM, y, y el parámetro $=1$. Esta equacion diferenciada dá $dx=2ydy$; multiplicándola por y, sacarémos el elemento de la semiparábola $ydx=2y^2dy$, y multiplicando este elemento por su distancia x á la li-

lineá *AT*, será $xydx = 2xy^2\,dy = 2y^4dy$, porque $x =$ Fig.
y^2, cuya integral $\frac{2y^5}{5}$ dividida por la suma de los ele- 17.
mentos $S.ydx = S.2y^2\,dy = \frac{2}{3}y^3$, dá $\frac{6}{10}y^2 = \frac{3}{5}x$. Y si hacemos $AP = AF = a$, sacarémos que la distancia del centro de gravedad de toda la semiparábola á la tangente *AT* es $\frac{3}{5}a$.

Para determinar la distancia del mismo centro de gravedad respecto del ege *AF*, considerarémos que el elemento $pPMm = ydx$ tiene su centro de gravedad en medio de $rs = y$; luego el momento de este elemento respecto del ege *AF* será el producto de ydx por $\frac{1}{2}y$, ó $\frac{1}{2}y^2\,dx = \frac{1}{2}xdx$; y la suma de estos momentos, esto es, $S.\frac{1}{2}xdx$ será $= \frac{x^2}{4}$; la suma de los elementos, esto es, $S.ydx$ será $= S.x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{2x^{\frac{1}{2}}x}{3} = \frac{2y^3}{3}$. Dividiendo pues, la suma de los momentos por la suma de los elementos, ó $\frac{x^2}{4} = \frac{y^4}{4}$ por $\frac{2y^3}{3}$, saldrá $\frac{3y^4}{8y^3} = \frac{3}{8}y$ expresion de la distancia que nos propusimos averiguar.

96. Cuestion VII. *Hallar el centro de gravedad de* 18.
una pirámide.

Nos figuraremos que un plano *TT* paralelo á la base pase por el vértice *A* de la pirámide. Tirarémos la linea *AC* por el centro de gravedad de la base; es patente que esta linea tambien pasa por el centro de gravedad de la seccion *MOQ* paralela á la base, y que los planos *MOQ*, *BFD* son semejantes. Llamemos, pues, *AP*, x; *Pp*, dx; *AC*, a; y el plano de la base b^2. No hay duda (Geom.) en que los planos *MOQ*, *BFD* siguen la razon de los quadrados de las lineas *AP*, *AC*;

 lue-

Fig. 18. luego $aa : bb :: xx$: al plano $MOQ = \frac{bbxx}{aa}$. Si multiplicamos este plano por dx, sacarémos el elemento de la pirámide $= \frac{b^2x^2dx}{a^2}$, y multiplicando este elemento por x, sacarémos su momento respecto del plano TT, $= \frac{b^2x^3dx}{a^2}$. Dividiendo la suma $\frac{b^2x^4}{4a^2}$ de los momentos por $\frac{b^2x^3}{3a^2}$ suma de los elementos, sacarémos $\frac{3x}{4}$ que expresará la distancia del centro de gravedad de la pirámide $AMOQ$ al plano TT. Si hacemos $x=a$, la distancia del centro de gravedad de toda la pirámide será $\frac{3}{4}a$. Luego con tomar $AP = \frac{3}{4}a$, será el punto P el centro de gravedad de la pirámide.

Si la linea AC no fuese perpendicular á la base, tiraríamos la Ac perpendicular á dicha base, y con hacer $Ac = g$, $AN = x$, $nN = dx$, probaríamos con mucha facilidad que el centro de gravedad de la pirámide total dista de TT la cantidad $AN = \frac{3}{4}g$. Si tiramos las lineas cC y NP, de los triángulos semejantes ACc, APN sacarémos $g : \frac{3}{4}g :: a : AP = \frac{3}{4}a$. Pero el centro de gravedad de la pirámide está en la linea AC que pasa por el centro de todos los elementos, luego está en P.

97. Luego el centro de gravedad de un cono está en su ege á los $\frac{3}{4}$ del ege contando desde el vértice; porque el cono es una pirámide de base circular. Lo propio sucedería si la base del cono fuese una elipse, en cuyo supuesto se llamaría *cono elíptico*.

17. 98. Cuestion VIII. *Hallar la distancia del centro de gravedad del paraboloide* BAD *originado de la revolucion de la parábola al rededor de su ege, respecto del vértice* A.

Si

Si en la fórmula $\frac{c}{2r}y^2dx$ substituimos en lugar de dx su valor sacado de la equacion $x=y^2$, sacarémos $\frac{cy^3dy}{r}$ expresion del elemento del paraboloide, y multiplicándole por $y^2=x$, será $\frac{cy^5dy}{r}$ el mòmemento de este elemento, y la suma de los momentos será $S.\frac{cy^5dy}{r}=\frac{cy^6}{6r}$. Si la dividimos por la suma de los elementos $=S.\frac{cy^3dy}{r}=\frac{cy^4}{4r}$, sacarémos por último $\frac{2}{3}y^2=\frac{2}{3}x$ expresion de la distancia que buscamos. Si hacemos $x=a$, será $\frac{2}{3}a$ la distancia á que está del vértice A el centro de gravedad del paraboloide. Fig. 17.

99. Cuestion IX. *Hallar el centro de gravedad del sólido engendrado por la semiparábola al rededor de la tangente* TL. 17.

No hay duda en que el centro de gravedad está en la tangente AT. Si llamamos AF, a, y c, la circunferencia trazada con este radio; la circunferencia trazada con el radio $AP=x$ será $\frac{cx}{a}$. Si multiplicamos esta circunferencia por $MP=y$, sacarémos $\frac{cxy}{a}$ expresion de la superficie cilíndrica trazada por PM en la revolucion. Si la multiplicamos por $Pp=dx$, el elemento cilíndrico del sólido de revolucion será $=\frac{cxydx}{a}$. La equacion de la parábola $px=yy$ dá $y=p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$; luego el elemento del sólido es $=\frac{c}{a}\times p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}dx$. Si multiplicamos este elemento por $\frac{1}{2}y=\frac{1}{2}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$, esto por la distancia de su centro de gravedad al círculo trazado por AF, el momento de este ele-

Fig. 17. elemento respecto de AF será $\frac{cpx^2dx}{2a}$. Dividiendo la suma de los momentos $\frac{cpx^3}{6a}$ por la suma de los elementos $\frac{2cp^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}}{5a}$, saldrá $\frac{5}{12}\ p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{12}y$. Si hacemos $FD = b$, é $y = b$, y tomamos $AL = \frac{5}{12}b$, el punto L será el centro de gravedad que buscamos.

19. 100. Cuestion *X. Hallar la distancia del centro de gravedad del sólido originado de la revolucion de la area eliptica* BAD *al rededor del ege* AF.

Se viene á la vista que el centro de gravedad está en el ege de la curva. Si llamamos el parámetro de la curva p; a, el exe mayor; x, la abscisa AP; y, la ordenada PM, tendrémos $y^2 = \frac{p}{a}(ax - xx)$. Si llamamos AF, r; c, la circunferencia trazada con el radio AF, la circunferencia trazada con el radio y será $\frac{cy}{r}$, y la superficie del círculo cuya es esta circunferencia será $\frac{cy^2}{2r}$. Si multiplicamos esta circunferencia por dx, sacarémos $\frac{cy^2dx}{2r} = \frac{c.p}{2ra}(axdx - x^2dx)$ expresion del elemento del sólido que engendra el plano APM. Con multiplicar este elemento por la distancia $AP = x$, á la linea TT, será $\frac{cp}{2ra} \times (ax^2dx - x^3dx)$ la expresion del momento de este elemento, cuya integral $\frac{cp}{2ra}\left(\frac{ax^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)$ será la suma de los momentos y dividiéndola por $\frac{cp}{2ra}\left(\frac{ax}{2} - \frac{x^3}{3}\right)$ suma de los elementos, hallarémos que la distancia que buscamos es

Fig. 19.

$$es = \frac{\frac{a}{3}x - \frac{x^2}{4}}{\frac{a}{2} - \frac{x}{3}} = \frac{\frac{4ax-3x^2}{12}}{\frac{3a-2x}{6}} = \frac{4ax-3x^2}{6a-4x}$$ quando se considerare el sólido que engendra APM. Luego sacarémos esta distancia con decir: $6a-4x : 4a-3x :: x$: á la distancia que se busca.

101. Si suponemos $x = \frac{1}{2}a$, esta distancia será $\frac{\frac{5}{4}a^2}{4a} = \frac{5}{16}a$. Si $x = a$, la misma distancia será $\frac{aa}{2a} = \frac{1}{2}a$. Esto quiere decir, *que la distancia del centro de gravedad de un semielipsoide al rededor de su ege mayor respecto de la tangente en el vértice* A, *es igual á los* $\frac{5}{16}$ *del ege, y la distancia del centro de gravedad de todo el elipsoide está en medio del ege.*

102. Cuestion XI. *Quando la curva* BAD *es un arco de círculo, hallar la distancia del centro de gravedad del sólido engendrado por la revolucion de la curva al rededor del ege* AP, *respecto de la linea* TT. 19.

Con hacer el parámetro $p=a$, la equacion de la elipse se transformará en estotra $y^2 = ax - xx$ propia del círculo (II. *Sec. con.*). Luego el elemento $\frac{cp}{2ra}(axdx - x^2dx)$ hallado poco ha (100) será $\frac{c}{2r}(axdx - x^2dx)$, y el momento $\frac{cp}{2ra}(ax^2dx - x^3dx)$ del mismo elemento será $\frac{c}{2r}(ax^2dx - x^3dx)$. Dividiendo, pues, la suma de los momentos por la suma de los elementos, hallarémos que la distancia propuesta $= \frac{4ax-3x^2}{6a-4x}$.

Con hacer $x = \frac{1}{2}a$, esta distancia será $\frac{5}{16}a$, y con hacer $x=a$, será $= \frac{1}{2}a$. Luego si una esfera y un esferoide tuvieren un mismo ege, el emisferio y el semiesferoide, la esfera entera y todo el esferoide tendrán un mismo centro de gravedad.

Cues-

Fig. 20. 103. Cuestion XII. *En el supuesto de ser* BAD *una hypérbola, cuyo ege es* AF, *se pregunta ¿ á que distancia de* TT *estará el centro de gravedad del sólido engendrado por la revolucion del plano* APM *al rededor del ege* AF?

Como la equacion de la hypérbola es $y^2 = \frac{p}{a}(ax + xx)$ (II. *Sec. con*) el elemento del sólido de revolucion será $\frac{cp}{2ra}(axdx + x^2 dx)$, suponiendo que *AF* es la prolongacion del primer ege de la hypérbola, y el momento de este elemento será $\frac{cp}{2ra}(ax^2dx + x^3dx)$. Luego con dividir la suma de los momentos por la de los elementos sacarémos que la distancia propuesta $= \frac{4ax + 3x^2}{6a + 4x}$. Si $x = a$, dicha distancia será $\frac{7aa}{10a} = \frac{7}{10}a$.

Usos del centro de gravedad para la medida de la extension.

104. Fúndanse estos usos en las dos proposiciones siguientes.

I. *Si una linea gira al rededor de un ege puesto en el mismo plano que ella, engendra una superficie igual al producto de la misma linea por el arco que traza su centro de gravedad.*

Sea la linea $AM = s$, el elemento $Mm = ds$, la distancia *fn* del centro de gravedad de este elemento al ege de revolucion *Lg*, $= y$, el momento de este elemento será $= yds$, y la distancia *LC* del centro de gravedad de la linea *AM* al ege *Lg* será $= \frac{S.yds}{S.ds} = \frac{S.yds}{s} = u$. Luego $S.yds = us$. Si multiplicamos ambos miembros de esta equacion por la razon $\frac{c}{r}$ de la circunferencia al radio, sacarémos $\frac{c}{r}.S.yds = \frac{c}{r}us =$

s

Fig.

$s\frac{c}{r}u$. Pero $\frac{c}{r}u$ es la circunferencia trazada por el radio $LC=u$, ó es la circunferencia que traza el centro de gravedad del arco AM, y $\frac{c}{r}y$ es la circunferencia que traza el medio n del elemento ds, cuya circunferencia multiplicada por el elemento ds dá el elemento de la superficie engendrada, que es $= S.\frac{c}{r}yds$. Luego esta superficie es igual al producto de la linea AM multiplicada por el camino que anda su centro de gravedad.

105. II. *Toda superficie que gira al rededor de un ege que está en el mismo plano que ella, engendra un sólido igual al producto de dicha superficie por el camino que anda su centro de gravedad.*

Sea la superficie $ADB=s$, su elemento $FgmM$ 22.
$=ds$; si hacemos $nP=CL=y$, y suponemos en C, centro de gravedad de dicho elemento, el momento de este elemento respecto del ege PL será yds; la distancia del centro de gravedad de la superficie al ege PL será $\frac{S.yds}{s}=u$; luego $S.yds=su$; luego $S.\frac{c}{r}yds=\frac{c}{r}su$. Pero $\frac{c}{r}y$ es la circunferencia que traza el punto n ó el punto C, y $\frac{c}{r}yds$ es el sólido engendrado del elemento $mMFg$, y $S.\frac{c}{r}yds$ es el sólido engendrado por la superficie s; luego este sólido es $=\frac{c}{r}us$. Pero $\frac{c}{r}u$ es la circunferencia que traza el centro de gravedad de la superficie s, luego el sólido engendrado de la superficie s, es igual al producto de la misma superficie por la circunferencia que traza su centro de gravedad.

106. Si parte de la linea ó superficie que gira es-

Fig. estuviera del otro lado del ege de rotacion, respecto del centro de gravedad de la misma linea ó superficie, la superficie ó el sólido engendrado por dicha parte, deberá tomarse negativamente. Luego la diferencia de las dos porciones ó cantidades engendradas será igual á la cantidad que gira multiplicada por el camino que anda su centro de gravedad. Si el ege de rotacion pasare por el centro de gravedad, las cantidades que engendrarán las partes de cada lado serán iguales. Si se determina el centro de gravedad de cada parte, se sacará la cantidad que cada parte engendráre, y por lo mismo la suma de las cantidades engendradas.

Algunas consideraciones acerca de los centros de gravedad.

107. Ya que el centro de gravedad es (81) el punto único donde está reconcentrada la pesantéz del cuerpo que le solicita ácia abajo, síguese que no se podrá sostener dicho cuerpo á no ser que esté sostenido su centro de gravedad. Pero como no es posible sostenerle inmediatamente, basta, para que el cuerpo se mantenga en equilibrio, que su centro de gravedad esté en la vertical que pasa por el punto donde se sostiene el cuerpo.

23. Por consiguiente, si suponemos un sólido qualquiera *BB* atado en *C* ó sostenido en *A*, no se podrá mantener en equilibrio á no ser que *CG* y *AG* estén en la vertical que pasa por el centro de gravedad *G*. En otra situacion qualquiera, el peso del cuerpo obrará sin que haya quien le contrareste, de modo que destruirá el equilibrio, y resultará un movimiento de rotacion. Pero siempre que el punto de suspension ó de apoyo estuviere en una direccion vertical contraria á la direccion del centro de gravedad, quedará aniquilada toda la fuerza de este centro, y habrá equilibrio.

Re-

108. Recíprocamente, siempre que un cuerpo estuviere en equilibrio, inferiremos que su centro de gravedad está sostenido en la direccion de una linea vertical. De aquí sacamos un método práctico para determinar el centro de gravedad de un cuerpo qualquiera. Se pondrá el cuerpo en equilibrio sobre la arista de un prisma, v. gr. señalando en su superficie la linea de interseccion con la arista del prisma. Despues se le pondrá en equilibrio sobre la misma arista, de modo que el cuerpo descanse sobre otra cara que la primera vez, señalando tambien en esta la linea de interseccion con la arista. Estas dos lineas se cortarán, y si imaginamos una perpendicular que desde el punto de interseccion penetre cuerpo adentro, esta linea pasará por su centro de gravedad, y señalará en qué situacion se le deberá sostener ó colgar para que esté en equilibrio. Fig.

109. Veamos ahora qual es la condicion del equilibrio respecto de un cuerpo que descansa sobre dos puntos. Se echa de ver que estos dos puntos han de contrarestar todo el conato de su peso; y para que esto se verifique es indispensable que el centro de gravedad del cuerpo esté en el plano vertical que pasa por los dos apoyos; en otra situacion qualquiera, el cuerpo girará al rededor del ege que descansa sobre dichos dos puntos.

110. En esta situacion es muy facil de determinar la carga de cada uno de los dos apoyos. Supongamos, para manifestarlo, que sea G el centro de gravedad de un cuerpo cuyo peso suponemos que obra en la direccion de la perpendicular Gg. Resolveremos esta potencia en otras dos Aa, Bb paralelas, que pasen por los dos apoyos A y B; despues tirarémos una recta qualquiera agb cuyas partes serán conocidas, y haremos estas dos proporciones; ab es al peso del cuerpo, como bg es á la carga del apoyo 24.

A,

Fig. *A*, como *ag* es á la carga del apoyo *B* (70).

111. Pero ¿quales serán las condiciones del equilibrio, quando el cuerpo estuviere sobre un plano orizontal?

I. Quando descansáre sobre dicho plano por un extremo no mas, será preciso que la vertical bajada desde el centro de gravedad *G*, pase por el punto de
25. contacto *C*. Donde no, el cuerpo se caerá del lado donde cayere la vertical. Pero si esta vertical pasára, aunque sea menester prolongarla, por el punto *C*, el cuerpo no podrá menos de estarse inmobil, porque el movimiento cuyo efecto sería arrastrarle en la direccion de la vertical, le contraresta el plano, no habiendo tampoco razon para que se caiga del un lado antes que del otro.

II. Para que el equilibrio se verifique en el caso de descansar el cuerpo en un plano qualquiera sobre
26. una de su caras, es preciso que la vertical *CG* bajada desde el centro de gravedad pase por uno de los puntos de la basa; donde no, el cuerpo se caerá del lado de la vertical.

Del Rozamiento en general.

112. Las superficies de los cuerpos, aun de los mas bruñidos, está empedrada, como suelen decir, de una infinidad de asperidades ó eminencias, y acribillada de muchísimos poros ó huecos. Quando un cuerpo descansa sobre otro, las partes salientes del uno se introducen en los poros ó huecos del otro; y para sacar las unas de dentro de los otros, se necesita indispensablemente alguna fuerza. La resistencia que resulta de esta propiedad de los cuerpos se llama *Fuerza del Rozamiento.*

113. Hay dos especies de rozamiento; es á saber, el rozamiento de los cuerpos que se resbalan unos por otros, y el de los cuerpos que ruedan. El rozamiento de

de la primera especie es mucho mayor que el de la segunda, porque en el primer caso para hacer que el cuerpo corra es forzoso levantarle un poco verticalmente para sacar las eminencias de dentro de las cavidades, ó quebrantar las puntas con un movimiento que les sea perpendicular. Pero en el segundo caso el movimiento de rotacion coadyuva por sí á desprender las eminencias de las concavidades, y hace correr ó resbalar el cuerpo como por un plano inclinado. Fig.

114. Hay movimientos en que concurren las dos especies de rozamiento. Pero vayan juntas ó separadas, se echa de ver que han de seguir unas mismas leyes; y consta que son mayores entre materias de una misma especie, que quando los cuerpos que se rozan son de materias diferentes. Tambien se ha observado que dejando mucho tiempo dos superficies una encima de otra, su rozamiento llega á ser mayor que no al principio.

115. La gran dificultad que hay en este asunto es saber qué leyes sigue la fuerza del rozamiento. Los mas de los Escritores son de parecer que es proporcional á la presion, esto es, á la fuerza que aplica una sobre otra las dos superficies. Quizá no es la presion el único elemento del rozamiento.

116. Como quiera, en lo que llevamos ánimo de manifestar acerca de esta resistencia, la supondremos proporcional á la presion, sin pretender sin embargo que sea siempre una misma la razon entre estas dos fuerzas. Varía esta razon segun son mas ó menos bruñidas las superficies. En los cuerpos que se resbalan sin rodar, el rozamiento puede ser el tercio, el quarto, ú otra parte qualquiera de la presion; en esto no hay nada fijo. Ya dejamos dicho que en los cuerpos que ruedan, es menor el rozamiento.

117. Esto presupuesto, sea M un cuerpo que descansa sobre el plano orizontal AB, del qual tira el 27.

Fig. peso *P* en la direccion *QC*, por medio del cordon
27. *QCP* que pasa por encima de la pólea *C*. Es patente que el movimiento del cuerpo *M* no tiene mas obstáculo que el rozamiento, pues el plano sobre que descansa aniquila todo el conato de su gravedad. Por consiguiente si no fuera por este obstáculo, la potencia *P* bastaría, por pequeña que fuese, para mover orizontalmente el cuerpo. Sentado esto, pónganse en lugar de *P* diferentes pesos, hasta dar con uno tal, que las cosas se pongan en términos de si se mueve ó no se mueve el cuerpo; esto dará á conocer la resistencia del rozamiento.

Prolónguese despues la direccion *CQ* hasta que encuentre en *M* la vertical *MN* tirada por el centro de gravedad; figúremos en *MN* el peso del cuerpo, y en *MV* la fuerza *P*, la diagonal *MT* representará la derivada de estas dos fuerzas. Esta derivada estará inclinada respecto de la orizontal *AB*; y el ángulo *MTN* que mide esta inclinacion, se llama el *ángulo del rozamiento*. La primera de estas fuerzas, es á saber la fuerza *MN* se consume con la resistencia del plano *AB*; la segunda, es á saber la fuerza *MV*, que está en la misma direccion del rozamiento, no se consume sino quando es cabalmente igual con la resistencia del rozamiento; luego no puede menos de ser igual al rozamiento. Por consiguiente *MN* expresará la fuerza con que el cuerpo carga el plano, ó la presion, y *NT*=*MV* será la fuerza del rozamiento. Y como siendo *NT* el radio, es *MN* la tangente del ángulo *MTN* del rozamiento (*Trigon.*), tendremos: la *tangente del ángulo del rozamiento es el radio, como la presion es al rozamiento.*

118. En general, para que un cuerpo esté si se mueve ó no se mueve, es preciso que la derivada de las fuerzas que le solicitan, forme con la superficie donde se hace el rozamiento un ángulo igual al del ro-

rozamiento, y tambien que el punto *T* de la basa Fig.
AB por donde pasa esta derivada no esté fuera de la basa, porque si estuviere fuera de ella, el cuerpo se volcará.

DE LA ESTÁTICA,

Ó DEL EQUILIBRIO Y DEL MOVIMIENTO *EN LAS MÁQUINAS.*

Las Máquinas unas son simples, y otras compuestas; conocidas las primeras, que son las maromas, la palanca, la garrucha, el torno, el plano inclinado, la rosca y la cuña, se viene facilmente en conocimiento de las demas.

De las Maromas, ó de la Máquina funicular.

119. Sean dos potencias *A*, *B* que tiran ácia direcciones encontradas de la maroma *AB*; si fueren iguales, cada una aniquilará el conato de la otra; habrá, pues, equilibrio entre ellas. Esto no tiene duda. 28.

120. Sean ahora *A*, *B*, *C* tres potencias aplicadas á los t res cordones *AD*, *BD*, *CD* juntos unos con otros en el punto *D*; hemos de averiguar qué condiciones han de concurrir para que esté en equilibrio el sistema. 29.

Figuremos en *Da* la potencia *A*, y en *Dc* la potencia *C*; concluyamos el paralelógramo *ADcK*, y hallarémos 1.° que la accion de estas dos fuerzas en el nudo *D*, será igual á su derivada *DK* (23); 2.° que no puede haber equilibrio en el sistema, á no ser que la potencia *B*, figurada en *Db* destruya el conato de esta derivada; es pues, preciso que sea igual con ella y contraria (77); luego debe estar en la misma

Fig. linea Kb, de donde se sigue que *los tres cordones*
29. *han de estar en un mismo plano.*

Fuera de esto, las tres potencias A, C, B son unas respecto de otras (22) lo que Da, Dc, DK; pero (24) Da; Dc : DK : : sen KDc : sen aDK : sen aDc :: sen BDC : sen ADB : sen ADC (*Trigon.*); luego

$A : C : B :: \text{sen } BDC : \text{sen } ADB : \text{sen } ADC$; de donde se sigue que *cada potencia ha de ser como el seno del ángulo que forman las direcciones de las otras dos.*

121. Si en vez de estar la cuerda BD atada en el nudo D con la cuerda ADC, solo pasará por una sortija puesta en el extremo D de la cuerda BD, entonces sería preciso para el equilibrio que la sortija no pudiera escurrirse por la cuerda ADC; y esto se verificará siempre que la linea BDK parta por medio el ángulo ADC. En este caso las dos potencias A y C serán iguales, y tendremos las siguientes proporciones.

$$A : B :: \text{sen } BDC : \text{sen } ADC :: \text{sen } \tfrac{1}{2} ADC : \text{sen } ADC.$$

122. Quando dos potencias A y C obran una contra otra por medio de un cordon ADC, sujeto en D de modo que no pueda escurrirse, se viene á los ojos que para que haya equilibrio han de ser iguales. De
30. donde inferirémos que no puede haber equilibrio entre dos fuerzas qualesquiera aplicadas á los dos extremos de una cuerda que abraza tirante el contorno de un polígono ó de una curva, á no ser que sean iguales.

123. Quando son mas de tres las fuerzas aplicadas á otros tantos cordones atados unos con otros con un mismo nudo, se busca primero la derivada de dos de las fuerzas, con lo que se reducen á una menos; se prosigue despues la misma reduccion, hasta que no queden mas que dos potencias iguales y opuestas; y entonces todo el sistema está en equilibrio. Lo propio se practicaría si algunos de los cordones estuviesen atados á puntos fijos; porque el conato que ca-

cada apoyo contrarestaría supliría por una potencia. Fig.

124. Supongamos ahora que las fuerzas *A*, *E*, *F*, 31.
G, *H*, algunas de las quales pueden ser puntos de apoyo, tiren en los puntos *A*, *B*, *C*, *D*, *H* de una cuerda *ABCDH*. Para determinar las condiciones del equilibrio, y las tensiones ó tiranteces respectivas de los cordones *AB*, *BC*, *CD*, *DH*, repararémos que si todo el sistema está en equilibrio, tambien lo estarán todas sus partes. Podremos, pues, mirar como fijos los puntos *A*, *C*, mientras la potencia *E* luchare con estos dos apoyos. Pero para que forme equilibrio con su resistencia, es indispensable que se verifiquen las dos proporciones siguientes (120):

La potencia *E* es al seno del ángulo *ABC*, como la potencia *A*, ó el conato que contraresta el apoyo *A*, ó la tension del cordon *AB* que llamarémos *T*, *AB*, es al seno del ángulo *EBC*.

La misma potencia *E* es al seno del mismo ángulo *ABC*, como la tension del cordon *BC* es al seno del ángulo *ABE*; luego

E : sen *ABC* :: *T*, *AB* : sen *EBC* :: *T*, *BC* : sen *ABE*.

Para que la parte *BCDF* se mantenga en equilibrio, es tambien preciso que tengamos

F : sen *BCD* :: *T*, *BC* : sen *FCD* :: *T*, *CD* : sen *BCF*.

Finalmente, el equilibrio particular del sistema *CDHG* pide que

G : sen *CDH* :: *T*, *CD* : sen *HDG* :: *T*, *DH* : sen *CDG*.

De todas estas proporciones se pueden sacar seis equaciones, y otras tantas condiciones para el equilibrio, las quales servirán para determinar la razon entre las tensiones de dos cordones, sin intervencion de las fuerzas *E*, *F*, *G*, ó la razon entre dos fuerzas sin intervencion de las tensiones de dos cordones &c.

125. Paremos un rato mas la consideracion en la máquina funicular *ABCDH*. La potencia *F* figurada en *CF* se resuelve en otras dos *Cb*, *Cd* que están en

 las

Fig. las prolongaciones de los cordones *BC* y *CD* cuyas
31. tensiones expresan. El conato *Cb* se comunica en *B*, y obra junto con la potencia *E*, de modo que su derivada cuya direccion es *BK* se gasta en poner tirante el cordon *BA*, ó en cargar el apoyo *A*, ó se quiera en contararestar la potencia *A*. Por consiguiente la tirantez de este cordon puede expresar la derivada de las dos potencias *E* y *Cb*.

La derivada de las dos fuerzas *G* y *Cd* podrá tambien expresar la tension del cordon *DH*; luego la derivada de las quatro potencias *E*, *Cb*, *Cd*, *G*, ó de los tres cordones *E*, *F*, *G* es de todo punto la misma que la de las tensiones de los dos cordones extremos *AB*, *DH*: luego pasa por el punto de concurso *K* de los dos cordones extremos.

126. En general: *Sean quantas fueren las potencias aplicadas á una misma cuerda, y sean las que fueren sus direcciones, su derivada siempre pasa por el punto de concurso de los dos cordones extremos.*

Quando estas potencias obran en una misma direccion y son paralelas, su derivada es igual á su suma (67), y es paralela con ellas (70). Sea, pues, una cuerda pesada atada en *A* y *B*, la qual en el
32. estado de equilibrio forme la curva *AEB*. Sean *AC*, *BC* las dos tangentes en *A* y *B*; la derivada de la carga de los dos apoyos pasará por el punto de concurso *C* de las dos tangentes, su direccion estará figurada en una linea vertical *CE*, y su valor será el peso mismo de la cuerda, esto es, la suma de las potencias que solicitan cada uno de sus puntos. Llamemos, pues, *A* y *B* las cargas de estos dos apoyos, y *P* el peso de la cuerda, tendremos

$$P : \text{sen } ACB :: A : \text{sen } ECB :: B : \text{sen } ACE.$$

Si *B* representa una potencia que tira de la cuer-
33. da aplicada en el punto *A* á una máquina, la fuerza que hace la potencia contra el punto *A* se comu-

T A T
19
P M
p m
B F D
T A T
20
P M
p m
B F D
D
g
F
B
23
C
B B
A
A G B
a
g b
24
A B
28
27
M V Q
C
A N T B
P
E
F
30
G
B
A
H
31
B
C
D
E
d
b
F
G
F
K

munica en la direccion de la tangente *AC* de la curva que forma la cuerda con su peso ; esta fuerza solo es igual á la de la potencia *B*, quando la vertical tirada por el punto de concurso *C* de las dos tangentes extremas divide el ángulo *ACB* en dos partes iguales: y en general, la accion de la potencia *B*, la que comunicaría si la cuerda no fuese pesada, es á la que comunica siendo la cuerda pesada, como el seno de *ACE*, es al seno de *ECB*. Fig. 33.

127. Por mas fuerza que se haga no es posible poner tirante orizontalmente una cuerda de modo que no pandée, y se prueba muy facilmente por lo que acabamos de decir. Sea *T* la fuerza que por ambos lados pone tirante la cuerda *AEB*, cuyo peso llamarémos *P* ; tendremos *T* : *P* : : sen *ACD*: sen *ACB*. Luego si el ángulo *ACB* fuese infinitamente obtuso; quiero decir, si la cuerda estuviese perfectamente tirante, el seno del ángulo *ACD* será igual á la unidad, y el seno del ángulo *ACB* será cero (*Trigon.*). Sería, pues, menester una tension infinita para que no pandeára nada la cuerda. Siempre que sea finita lá fuerza con que se la tenga *tirante*, el ángulo *ACB* será tambien finito. 34.

Por ser el ángulo *ACB* duplo del ángulo *ACD*, tendremos sen $ACB = 2$ sen ACD cos $ACD = 2$ sen ACD sen CAD; luego $T \cdot 2$ sen $CAD = P$. Supongamos la potencia *T* muy grande respecto del peso de la cuerda, *AD* no discrepará sensiblemente de *AE*, ni *DE* de *EC*; por consiguiente si llamamos *L* la longitud de la cuerda, tendrémos sen $CAD = \frac{CD}{AC} = \frac{2DE}{\frac{1}{2}L}$, de donde se saca $2T \cdot \frac{2DE}{\frac{1}{2}L} = P$, y $DE = \frac{P.L}{8T}$.

Supongamos que con un peso de 5 libras se ponga tirante una cuerda de 24 pies que suponemos pe-

Fig. pesa $161\frac{5}{6}$ granos, veamos quanto pandeará.

34. Reduciremos las 5 libras á $5 \cdot 16 \cdot 8 \cdot 72$ granos, y tendremos $DE = \frac{161\frac{5}{6} \cdot 24}{5 \cdot 16 \cdot 64 \cdot 72} = \frac{485,5}{5 \cdot 16 \cdot 8 \cdot 72} = \frac{48,55^{ps}}{64 \cdot 72} = \frac{48,55^{pulg}}{64 \cdot 6} = \frac{48,55^{lin}}{32} = 1 \text{ lin } \frac{1}{2}$. Lo mismo cabalmente que enseña la experiencia, quando se hace el experimento con una cuerda cuyos 33 diámetros igualan dos pulgadas.

De la Palanca.

35. 128. La *palanca* es una vara inflexible *PCQ* que descansa sobre un punto *C*, al rededor del qual puede moverse con desahogo. Prescindiremos por ahora de su peso, á fin de que sean menos complicadas las investigaciones en que vamos á empeñarnos.

Sean dos potencias *A* y *B* aplicadas en los dos extremos *P* y *Q* de una palanca *PCQ*, sea la que fuere su figura; propongámonos determinar las condiciones del equilibrio en esta máquina. Con esta mira prolongarémos las direcciones *AP* y *BQ* de las dos potencias hasta el punto de concurso *E*, donde las podemos considerar como que obran juntas. Si figuramos en *EF* la accion de la fuerza *A*, y en *EG* la de la fuerza *B*, será la diagonal *EH* su derivada, la qual, segun se echa de ver, solo quedará destruida quando se dirigiere ácia el punto de apoyo *C*. Sea, pues, *C* la carga de este apoyo, figurada en *EH*, tendremos (22 y 24) para el equilibrio

$C : A : B :: EH : EF : EG :$ sen $PEQ :$ sen $CEQ :$ sen CEP.

129. Ya qué la derivada de las potencias *A* y *B* pasa por el apoyo *C*, la suma de los momentos respecto de este punto ha de ser cero (65). Por consiguiente si desde el punto *C* tiramos las perpendiculares *CM*, *CN* á las direcciones *AP*, *BQ*, tendre-

dremos $A . CM = B . CN$, conforme se puede tambien inferir de la proporcion $A : B :: \text{sen } CEQ : \text{sen } CEP$. De aquí sacarémos el principio general del equilibrio en la palanca. Fig. 35.

Para que dos potencias aplicadas á los dos extremos de una palanca formen equilibrio, es preciso que sus momentos sean iguales, ó, lo que viene á ser lo propio (69), *es preciso que cada potencia sea recíprocamente como la perpendicular tirada desde el punto de apoyo á su direccion.*

130 Sean las que fueren las potencias aplicadas á la palanca, la derivada siempre pasará en este caso por el punto de apoyo, y por consiguiente (65) la suma de los momentos de las potencias que procuran hacer girar la palanca ácia una direccion, es igual á la suma de los momentos de las que procuran hacerla girar en una direccion contraria, tomando los momentos desde el punto de apoyo.

131. Si las direcciones de las dos potencias ó los dos pesos A y B fuesen paralelas, las perpendiculares CM, CN estarán sobre una misma linea MN; y si á mas de esto fuere recta la palanca, sus dos brazos CP, CQ serán proporcionales á las lineas CM, CN. Tendremos, pues, para el equilibrio $A . CP = B . CQ$; por consiguiente *para que dos pesos se pongan en equilibrio en una palanca recta, han de estar en razon inversa de los brazos donde están.* 36.

Luego si el brazo CP fuese duplo del brazo CQ, un peso A de una libra se equilibrará con un peso B de dos libras. Pero se echa de ver que si se añadiera un mismo peso á cada uno de estos dos, ya no podría subsistir el equilibrio. Sería preciso para mantenerle, añadir á B un peso duplo del que se añadiese á A; de donde se sigue que con una palanca tan larga como convenga, se pueden poner en equi-

Fig. equilibrio dos pesos por mas desiguales que sean uno
36. con otro.

132. Si en lugar del peso *A* substituyéramos una potencia que se equilibrára con el peso *B*, podriamos considerar en una palanca tres cosas distintas, en quanto al nombre por lo menos; es á saber, la potencia, el peso que tambien se llama la resistencia, y el punto de apoyo. Estas tres cosas no son en substancia mas que tres potencias distintas, tales que las dos primeras juntan sus conatos contra el punto de apoyo que suple por la tercera, y destruye su derivada.

Como quiera, es estilo distinguir tres especies de palanca, respecto de la situacion del peso, de la potencia y del apoyo; llámase *palanca del primer género*, quando el apoyo está entre la potencia y el peso; *palanca del segundo género*, quando el peso está entre el apoyo y la potencia; *palanca del tercer género*, quando la potencia está entre el peso y el apoyo.

En el primer caso puede tener la potencia mas ó menos ventaja que el peso, conforme el brazo donde obrare fuere mas ó menos largo que el brazo donde está el peso. En el segundo caso la potencia siempre gana; en el tercero siempre pierde.

37. 133. Quando queremos sostener una mole *M*, pongo por caso una piedra muy grande, metemos por debajo de la piedra una corta parte *CP* de una palanca; y apoyando en el suelo el punto *C*, la potencia *Q* obra con tanta mayor eficacia, quanto el brazo *CQ* al qual está aplicada es mas largo que la parte *CP*. Los que distinguen tres especies de palanca consideran á esta como de la segunda.

134. Pero las tres especies expresadas de palanca se reducen á sola una, porque en realidad podemos considerar el peso, la carga del apoyo, y la potencia

cia como tres potencias distintas, que dos de ellas luchan con la tercera. Y una vez que lleguen á equilibrarse, tambien podríamos considerar qualquiera de los tres puntos P, C, Q como el apoyo de la palanca, pues todos son fijos. Fig. 36.

Sabemos, v. gr. que la expresion de la carga del apoyo C es $A+B$; podemos, pues, considerarla como una potencia que obra de abajo arriba, y se equilibra con la potencia Q, en la palanca PCQ cuyo apoyo está en P; y entonces la condicion del equilibrio está cifrada en $(A+B)\,PC = B \cdot PQ = B\,(PC+CQ)$, de donde sacamos igualmente $A \cdot CP = B \cdot CQ$, como antes (131).

135. Quando una palanca BA sostenida en sus dos extremos A y B está cargada en C de un peso qualquiera M, se viene á los ojos que para determinar la carga de los dos apoyos, es preciso resolver la potencia M en otras dos paralelas una con otra, tales que la una pase por el punto A, y la otra por el punto B. El valor de la que pasare por A será $\frac{BC}{AB} \cdot M$, y el valor de la que pasare por B será $\frac{AC}{AB} \cdot M$ 38.

136. Para llevar en cuenta la pesantéz de la palanca, la hemos de considerar como una potencia mas, cuyo conato reconcentrado en el centro de gravedad obra perpendicularmente al orizonte; de donde se infiere que no se debe llevar en cuenta el peso de la palanca, quando su centro de gravedad está en el punto de apoyo.

Pero supongamos que las dos potencias A y B sean paralelas y verticales, y que esté en G el centro de gravedad de la palanca PCQ, de modo que todo su peso L obre verticalmente en la direccion GL; si tiramos una recta qualquiera $MCIN$, tendre- 39.

Fig. dremos para la condicion del equilibrio $B\,.\,CN + L.$
39. $CI = A\,.\,CM$ (129).

137. Dada una palanca PCQ, su peso L, y las potencias A y B aplicadas á sus dos extremos, determinarémos el punto de apoyo C, sobre el qual se debe hacer el equilibrio, con imaginar una recta qualquiera $mcin$, que corte en m, i, n las perpendiculares PA, IL, QB dadas de posicion. Porque con esto tendremos $B\,.\,cn + L\,.\,ci = A\,.\,cm$; y substituyendo $ci + in$ en lugar de cn, y $im - ic$ en lugar de cm, sacarémos $B\,.\,ci + B\,.\,in + L\,.\,ci = A\,.\,im - A\,.\,ic$; luego $ic = \frac{A.im - B.in}{A+B+L}$. Determinando con esto el punto c, tirarémos por este punto una vertical cC, y esta cortará la palanca en el punto C que buscamos.

40. 138. Consideremos ahora una palanca del segundo género CPQ, soponiéndola recta y uniformemente pesada. Llamarémos su longitud CQ, a; la parte CP, b; y su gravedad específica, g. Será, pues, ga la expresion de su peso total L que hemos de considerar como que obra en el punto I el qual está en medio de CQ; y por lo mismo la condicion del equilibrio dará $Ba = bA + \frac{1}{2}gaa$, ó $B = \frac{bA + \frac{1}{2}gaa}{a}$. Si a fuere $= 0$, la potencia Q será infinita, y lo será tambien si a fuere infinita; luego entre estos dos casos extremos ha de tener valores finitos; luego para pasar del uno al otro debe pasar por el menor posible.

Para averiguar donde tiene este valor mínimo, igualarémos con cero la diferencial de B en el supuesto de no llevar mas variable que a; tendremos, pues, $-\frac{(Ab + \frac{1}{2}gaa)da}{aa} + gda = 0$, de donde sacarémos $a = \sqrt{\left(\frac{2Ab}{g}\right)}$. Substituyendo este valor de a en el

el de $B = \frac{Ab + \frac{1}{4}gaa}{a}$, hallarémos que el valor de la mínima potencia que pueda obrar con una palanca pesada del segundo género es $\surd.(2Abg)$, y qué la longitud de la misma palanca es $\surd\frac{2Ab}{g}$. Fig. 40.

Supongamos, v. gr. $CP = 3$ pulg. que la masa A pese 200 libras, y que la gravedad específica de la palanca, ó en general, lo que pesa cada pulgada es $\frac{1}{2}$ libra. Entonces $CQ = a = \surd(2400) = 49$ pulg. $= 4$ pies 1 pulg. y $B = \surd(600) = \frac{49}{2}$ lib. $= 24$ lib. 8 onzas. Luego para este caso se requiere una palanca de 4 pies 1 pulgada de largo, y una potencia equivalente al peso de $24\frac{1}{2}$ libras.

139. Quando ocurra levantar una piedra sobre su arista KL con una palanca del segundo género CPQ, no debe ser B igual á todo el peso de la piedra, porque parte de este peso le sostiene la arista KL; para determinar el valor de B, practicarémos lo que sigue. 37.

Sea G el centro de gravedad, N el punto donde la vertical que pasa por este centro, encuentra la base $KLFH$; prolónguese la PN hasta la linea KL. Sentado esto, el peso M en la direccion GN le resolveremos en dos potencias que pasarán la una por P, la otra por T. El valor de la primera será $\frac{NT}{PT}.M$; pero como no es perpendicular á la palanca, tendremos que resolverla tambien en otras dos, tales que la una seguirá la direccion de la palanca, y la otra será perpendicular á la misma direccion. Con el impulso de la primera se escurriria la piedra por la palanca, si no fuese por el rozamiento; pero la segunda será en realidad el valor de B.

De las Balanzas.

140. Entre varios instrumentos inventados para pe-

Fig. pesar los cuerpos, y que se refieren á la palanca, considerarémos primero las balanzas. Estas, las ordinarias por lo menos, son una palanca sostenida en equilibrio en su medio, colgando en cada uno de sus extremos un platillo.

La palanca *AB*, que tambien se llama la *cruz*, es la pieza principal de esta máquina. Sus dos bra-
41. zos *AX*, *BX* han de ser de todo punto iguales. Tambien conviene procurar que sean igualmente pesados, bien que esta condicion no es tan esencial como la primera para la perfeccion de la máquina; porque es muy facil de compensar siempre que se quiera la desigualdad de su peso con el peso de los platillos, siendo así que la desigualdad de su longitud de ningun modo se puede remediar.

Por medio *X* de la cruz pasa un ege *SX* llamado el *fiel*, cuya parte superior es redonda, la inferior es cortante. El fiel atraviesa tambien la *alcoba STX* en los agugeros *S*, *X* donde debe ser suma su mobilidad. La *lengüeta E* es parte de la cruz, siempre es perpendicular á su longitud, y se dispone de modo que sea perpendicular al plano de la alcoba, siempre que la cruz esté en situacion orizontal. Finalmente, en cada extremo de la cruz cuelga de tres cordones, ó tres cadenillas un platillo donde se ponen los géneros que se han de pesar. Quando están vacíos los platillos, es preciso, si son buenas las balanzas, que se mantengan en equilibrio, y que la lengüeta no se incline ácia lado alguno de la alcoba.

Nadie ignora que quando se quiere pesar algun género en las balanzas, se le pone en uno de los dos platillos, sea el que fuere, poniendo despues en el otro tanto peso como es menester para que haya equilibrio, y lo manifiesta la situacion vertical de la lengüeta. El peso del género siempre es igual á la suma de los contrapesos.

Sin

141. Sin embargo pueden ser imperfectas estas balanzas por ser el un brazo de la cruz mas largo que el otro, y entonces lo que el uno tuviere menos de largo se puede suplir con darle mas peso al platillo que de él cuelga; y como en este caso estarán los pesos de los platillos en razon inversa de las longitudes de los dos brazos, habrá equilibrio (131), aunque no sean perfectas las balanzas. Si se ponen con efecto géneros en el platillo del brazo mas largo, formarán equilibrio con un peso mayor que el suyo. Fig. 41.

142. Pero es cosa sabida que para comprobar estas balanzas basta pasar del un platillo al otro los géneros y los pesos. Al instante se echa de ver que el peso ya excesivo adquiere mayor eficacia colgándole del brazo mas largo, y preponderando sobre la marcha, se desvanece el equilibrio. Aunque falsas estas balanzas pueden servir para manifestar el verdadero peso de los géneros, con tal que después de pesarlos en cada platillo, se tome un medio proporcional geométrico entre el peso que forma equilibrio con el género en el un platillo, y el que le forma estando el género en el otro platillo. Para probarlo, sea y el peso del género; a, su contrapeso quando está en el platillo del brazo mas corto, que supondremos sea AS; tendremos, pues, $y \cdot AS = a \cdot SB$. Sea b el contrapeso del mismo género puesto en el otro platillo; tendremos $y \cdot SB = b \cdot AS$; luego $yy \cdot AS \cdot SB, = ab \cdot AS \cdot SB$, é $y = \sqrt{(ab)}$. Supongamos que despues de pesado el género en el un platillo, hallemos que se equilibra con un peso de 25 libras, y pesándole en el otro se equilibra con un peso de 26 libras, su peso verdadero será de 25 libras 7 onzas 7 dragmas 17 granos.

143. Las balanzas que acabamos de considerar son sin duda alguna muy acamodadas, pero tienen algunos inconvenientes. Uno de los mayores es que pa-

Fig. para pesar diferentes géneros se necesitan distintas pesas, siendo así que con la romana basta un solo peso para qualesquiera géneros. Otro inconveniente de las balanzas es que para sacarlas con mas perfeccion, es preciso hacer algo largos sus brazos, que por lo mismo se doblan, y de nada sirven. Tambien es preciso que la lengüeta se mueva con desahogo, para cuyo fin debe ser muy agudo su ege; pero quanto mas agudo es, sea de lo que fuere, tanto mas expuesto está á ponerse romo, y en llegando á perder el filo, ya no es tanta la mobilidad de las balanzas, por sèr mayor su rozamiento. De aquí proviene que unas balanzas muy finas para pesar en corta cantidad materias muy preciosas, como el oro y los diamantes, se echarian á perder muy en breve si con ellas se pesáran pesos muy grandes.

Quando la cruz está en situacion orizontal, el peso de la lengüeta carga sobre el ege de las balanzas, pero así que la cruz se inclina de algun lado, se viene á los ojos que el peso de la lengüeta ayuda á la potencia que prepondera. Esta es la razon por que por lo comun son muy pequeñas las lengüetas, y se les dá un corto contrapeso atado debajo de las balanzas, á fin de que gire en direccion contraria á la de la lengüeta.

De la Romana.

42. 144. La Romana se compone de una palanca *AB*, que debe ser tan movible como posible sea al rededor de un ege *C*. El uno de los brazos *CB* ha de ser mucho mas largo que el otro *CA*. Quanto mayor fuere la diferencia, tanto mas dilatado será el uso de la romana. Acia el extremo del brazo corto se cuelga un platillo para poner los géneros, ó se afianza un garabato para agarrarlos. A lo largo del otro brazo corre

re con desahogo un peso qualquiera *F* que de él cuelga por medio de un anillo. Quando no hay nada en el platillo, se arrima el peso *F* al punto de apoyo ó al centro del movimiento *C*, hasta que haya equilibrio entre las dos partes de la romana. Supongamos que entonces la sortija *H* esté en el punto cero señalado o en el brazo *CB*; es evidente que si ponemos un cuerpo qualquiera *Q* en el platillo se desvanecerá el equilibrio, hasta que el peso *F* se aparte bastante del centro *C*; y en poniéndolos en equilibrio uno con otro, será preciso (77) que el momento *CA*. *Q* sea igual al momento *F*. *CH*, menos el momento *F*. *Co* del mismo peso *F*, porque se le apartó en esta primera division en o. Luego *CA*. *Q* = *F*. *Ho*. Fig. 42.

De aquí se sigue, que si dividimos la parte *oB* de la palanca en partes iguales o1, 12, 23, 34 &c. tan largas como el brazo corto *CA*, el número que correspondiere al punto donde estuviere la sortija *H*, señalará quantas veces el peso *F* cabe en el peso del cuerpo propuesto *Q*. Pongo por caso que dicho peso, incluyendo en él el de la sortija, sea de una libra, y corresponda á la tercera division, inferirémos que el peso *Q* es de tres libras. Si se multiplican las divisiones de la palanca *CB*, se podrán pesar hasta las mas mínimas partes de la libra.

Del rozamiento en la Palanca.

145 En la palanca es muy corto el rozamiento, y en los mas de los casos se debe despreciar. Pero es preciso llevarle én cuenta en las balanzas, particularmente quando sirven para pesar fardos muy grandes.

146 Sea la palanca *AB* la cruz de unas balanzas, á la qual atraviesa perpendicularmente el ege orizontal *fbi* que gira sobre apoyos fijos. Sean tam- 43.

Fig. 43. bien los dos brazos cA, cB de todo punto iguales, é igualmente pesados. En el caso del equilibrio matemático, los dos pesos P y Q colgados á los extremos de la cruz, deberian ser iguales. Pero por causa del rozamiento podrá suceder que subsista el equilibrio aunque sea mayor el uno de los pesos que el otro. Supongo que se le añada al peso P un peso chico x, tal que empiece á perderse el equilibrio, y las balanzas se vayan ladeando ácia A. La derivada de los dos pesos $(P+x)$ y Q pasa por entre los puntos A y c. Por consiguiente, si todo estuviera en contrarestar esta derivada para mantener el equilibrio, sería preciso oponerle un apoyo en su direccion. Pero aquí la rotacion se hace forzosamente al rededor del centro c; de donde se sigue que este punto siempre es el centro de equilibrio, y que por consiguiente el rozamiento del ege con su cubo, se puede considerar como una fuerza que obra en la direccion de la tangente fg, la qual se equilibra separadamente con el peso x, mientras que los dos pesos P y Q se equilibran tambien separadamente uno con otro.

Sentado esto, llamemos a el radio del ege; b, el brazo cA ó cB de la cruz; n, la razon entre el rozamiento y la presion. Es patente que la presion que los apoyos padecen despues de añadido el peso x es $2P+x$, que por lo mismo el rozamiento es $n(2P+x)$. Pero el brazo de palanca de este rozamiento es a, y el del peso x que se equilibra con él es b. Luego tendremos (129) $n(2P+x).a = x.b$; de donde sale $x = \frac{2naP}{b-na}$.

Supongamos que cada uno de los dos pesos P y Q es de 200 libras; que el radio del ege es la centésima parte del brazo de la cruz, y que el rozamiento es $\frac{1}{3}$ de la presion; esto es, $P = 200$, $\frac{a}{b} = \frac{1}{100}$, $n = \frac{1}{3}$. Sacaremos $x = \frac{400 \text{ libr.}}{299}$.

De

34

37

36

40

43

42

De la Garrucha.

147 Es la *garrucha* ó *polea* una especie de máquina de diámetro y grueso arbitrarios. Su circunferencia *CFD* está hendida á manera de carril para que no se escurra la cuerda *ACB*, que la abraza, en cuyo extremo está atado el peso, estando la potencia asida del otro. La rueda dá vueltas al rededor de su ege *F*, dentro de las armas *FG*. 44.

Quando las armas están colgadas en *G*, la polea es fija; en este caso pide el equilibrio que la potencia *B* sea de todo punto igual con el peso; no lleva, pues, la potencia ventaja alguna al peso en esta máquina; verdad es que le facilita variar segun quiera su direccion, y esto le dá alguna ventaja en ciertos casos.

Pero quando la cuerda que abraza la polea tiene asegurado el un cabo en un punto fijo *A*, colgando el peso *M* de las armas, la polea se llama *mobil*; y es patente que en este caso la tension del cordon *AC*, ó la carga del apoyo *A* ha de ser igual á la potencia *B*; donde no, la polea se escurrirá por la cuerda. 45.

148 Sea *IK* la carga del apoyo, y *KL* la potencia *B*. La diagonal *HK* representará el peso *M*; tendremos, pues, $B : M :: KL : HK$, y los triángulos semejantes *HKL*, *CED* dán $KL : HK :: DE : CD$; luego $B : M :: DE : CD$. Luego *para que haya equilibrio en la polea mobil, es preciso que haya entre la potencia* B *y el peso* M *la misma razon que entre el radio de la polea y la subtensa del arco que la cuerda abraza.*

149 Por consiguiente siempre que este arco pasare de 60°, una potencia menor que el peso se equilibrará con él, y la potencia será para esto la menor posible, quando el arco que la cuerda abraza fuere

Fig. de 180°, lo que se verifica siempre que los dos cor-
45. dones *AC* y *BQ* son paralelos; en cuyo caso la potencia es la mitad del peso. Luego quando la potencia tiene toda la ventaja que cabe, obrando por medio de una polea mobil, se pone en equilibrio con un peso duplo. La razon por que pierde mucho la potencia quando el arco que *CD* subtende no llega á los 60°, se saca de lo dicho (I.490). En todo esto debe llevarse en cuenta el peso de la polea, si se quiere sacar muy riguroso el cálculo, para lo qual debe añadirse dicho peso al de la masa *M*.

46. 150 La propiedad de la polea mobil ha dado luz para inventar otra máquina, en la qual un peso ó una potencia *Q*, cuya accion se comunica por medio de una polea fija *T* á cinco poleas móbiles, se equilibra con el peso *P* colgado de la quinta. Todas estas poleas son iguales unas con otras, y paralelos los cordones que las sostienen. Cada uno de ellos tiene afianzado uno de sus extremos en *A* en un madero, pared &c.

Es evidente que la primer polea *O* debe equilibrarse con una potencia *Q* dos veces menor que la carga de sus armas. La de las armas que siguen, ha de ser por la misma razon quatro veces mayor que la misma potencia, y así de las demás, hasta la carga de la polea O^{IV} que es el peso *M*; el qual con esto está en equilibrio con otro peso *Q* treinta y dos veces menos pesado que él. Luego con multiplicar las poleas móbiles, se pueden aumentar muchísimo las fuerzas de una potencia que obra por medio de esta máquina.

47. 151 Llámase *trócula* una máquina compuesta de muchas poleas *A*, *B*, *C*, *D*, dispuestas como se quiera en unas mismas armas *AD*. Una fuerza mediana basta para vencer por medio de la trócula una grande resistencia; pero el efecto de esta máquina es mu-

mucho mas reparable quando se compone de una tróCula mobil y otra fija. Supongamos que la trócula *AD* esté firmemente afianzada en *M* y *N*, y que otra trócula *GE* de la qual cuelga un peso *P* esté colgada orizontalmente de la primera por medio de una cuerda *H*7654321*Q*, de cuyo extremo *Q* tira la potencia. Vamos á averiguar las condiciones del equilibrio entre el peso *P* y la potencia *Q*, teniendo presente que al peso *P* debe añadirse el peso total de la trócula movible, y de todo lo que le pertenece. Fig. 47.

Desde luego es evidente, por lo que dexamos dicho (147) acerca de la polea simple, que la tension del cordon 1 es igual á la potencia *Q*; que la del cordon 2 es igual á la del cordon 1, y á este tenor de los demas. Por consiguiente todos estos cordones han de estar igualmente tirantes, la medida de la fuerza de su tension siempre será la potencia *Q*.

Pero la tension de una cuerda en equilibrio es efecto de dos potencias iguales que de ella tiran en direcciones encontradas (119); por consiguiente podemos considerar que á cada cordon le tira de abaxo arriba la potencia *Q*, y de arriba abaxo otra potencia igual á *Q*. Pero la accion de esta no puede obrar otro efecto que cargar la trócula fixa, luego su efecto quedará destruido. Por el contrario, la primera procura levantar la trócula inferior; por consiguiente hemos de mirar cada cordon como la direccion de una potencia *Q* que obra para levantar la trócula *EFG*. Luego podemos resolver estas direcciones en otras orizontales *ik*, *no* &c. y otras verticales *il*, *nq* &c. Pero como las dos primeras son perpendiculares á la fuerza del peso, nada contribuyen para contrarestar esta fuerza, y en el equilibrio se destruyen unas á otras; luego el peso solo está sostenido por la suma de las fuerzas verticales *il*, *nq* &c. Pero en los triángulos rectángulos *ilm*, *nqp* &c.

Fig. tenemos (I. 720) $im : il :: 1 :$ sen iml; $np : im :: nq :$ 1 : sen npq; y así de los demás cordones; luego $il = im$ sen iml; $nq = im$ sen npq; luego por fin $Q : P :: im : im$ sen $iml + im$ sen npq &c. ó :: 1 : sen $iml +$ sen npq &c. Luego *la potencia es al peso, como el radio ó sen de 90° á la suma de los senos de los ángulos que forma con la orizontal cada uno de los cordones que rematan en las poleas movibles.*

Y por consiguiente quando estos cordones son paralelos, la potencia ha de ser al peso, como la unidad es al número de los cordones que van á parar al moton mobil; es, pues, esta la posicion que mas coadyuva al efecto de la potencia.

48. 152 La condicion que acabamos de probar se verifica igualmente quando ambas tróculas son verticales; pero entonces es preciso que las poleas sean de distintos tamaños; y si se quiere que los cordones sean paralelos, es preciso que los diámetros de las poleas que la cuerda abraza succesivamente, formen una progresion arismética cuya diferencia sea el diámetro de la polea mas chica.

Luego si suponemos que las poleas *D*, *E*, *C*, *F*, *B*, *G*, *A* sean respectivamente, por lo tocante á sus diámetros, como 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, tendremos para el equilibrio la condicion siguiente. ***El peso debe equivaler tantas veces á la potencia quantos son los cordones que rematan en la trócula mobil.*** Por manera, que en el caso propuesto, una potencia *Q* siete veces menor que el peso *P*, le mantendrá en equilibrio.

Del rozamiento en la Garrucha.

49. 153 Sea *OMCD* una polea cuyas armas cuelgan de un punto fixo *E*; el circulillo *A* es su ege sobre el qual dá vueltas con desahogo, ó la polea le arrastra haciendo que dé vueltas sobre dos apoyos. Sean *P* y *Q* dos

dos pesos iguales colgados de los extremos de una Fig.
cuerda $PDGMQ$ que abraza la polea. Supongamos 49.
que para alterar el equilibrio ó contrarestar el rozamiento, se le haya de añadir al uno de los dos pesos, al peso P, v. gr. otro peso x.

Sentado esto, es evidente que antes de añadir el peso x, la presion vertical que aguantaba el centro A, ó la superficie convexa del ege, era igual á $P+Q$, ó á $2P$; será, pues, la presion despues de añadir el peso x, $= 2P+x$; luego si representa n la razon entre el rozamiento y la presion, será en este caso el rozamiento $n(2P+x)$. Esta fuerza obra en una direccion tangente á la superficie convexa del ege, siendo así que el peso, cuyo destino es vencerla, obra en una direccion tangente á la superficie convexa de la polea; luego si llamamos a el radio del ege, b, el radio AC de la polea, tendremos por la condicion del equilibrio $x \cdot b = n(2P+x) \cdot a$, de donde sale $x = \frac{2naP}{b-na}$.

Supongamos, v. gr. que cada uno de los pesos P y Q sea de 100 libras, que sea el rozamiento $\frac{1}{5}$ de la presion, y el radio del ege la sexta parte del radio de la polea; esto es, $P = 100$ libras, $n = \frac{1}{5}$, $\frac{a}{b} = \frac{1}{6}$; será $x = 6\frac{26}{29}$ libras. Se necesitaría, pues, para vencer el rozamiento un peso de cerca de 7 libras.

154 Representa la figura un sistema de quatro 50.
poleas A, B, C, D que sostienen un peso P. Está colgado este peso de las armas de la polea A, y esta polea está sostenida por una cuerda cuya parte 1 está asegurada en el punto fijo E, y la parte 2 en las armas de la polea B; la polea B está sostenida por una cuerda cuya parte 3 está asegurada en F, y la parte 4 en las armas de la polea C &c. Todos los cordones 1, 2, 3, 4 &c. son paralelos unos con otros, y verti-

Fig. ticales, y son iguales todos los eges de las poleas.
59. Esto supuesto, en el simple estado del equilibrio, y prescindiendo del rozamiento, á cada uno de los cordones 1 y 2 le mantiene tirante una fuerza que es la mitad del peso P; á cada uno de los cordones 3 y 4 le mantiene tirante una fuerza que es la mitad de la tension de cada uno de los cordones 1 y 2, y por consiguiente la quarta parte del peso P &c. de suerte que la tension del último cordon 8, ó la potencia Q es la décimasexta parte del peso P. Pero quando se trata de vencer el rozamiento, crecen las tensiones de los cordones, y se determinan del modo siguiente.

Llamarémos en general n la razon entre el rozamiento y la presion; a, el radio de cada ege; b, el radio de cada polea.

1.° La presion que aguanta la superficie del ege de la polea A, por razon del peso P, es P. Sea x la fuerza que se le ha de añadir á la tension del cordon 2 para vencer el rozamiento, será $n(P+x)$ la expresion de este rozamiento. Luego discurriendo como antes (153) tendremos $bx = n(P+x)a$, de donde sacarémos $x = \frac{naP}{b-na}$. Por consiguiente si llamamos X la tension total del cordon 2, tendremos $X = \frac{P}{2} + \frac{naP}{b-na}$.

2.° Si no hubiese rozamiento en el ege de la polea B, es evidente que á cada uno de los cordones 3 y 4 le tendria tirante una fuerza $= \frac{X}{2}$; de modo que resultaría en el ege de la misma polea una presion $= X$. Sea y la fuerza que se le ha de añadir á la tension del cordon 4 para vencer el rozamiento de la polea B; la expresion de este rozamiento será $n(X+y)$, y tendremos $by = n(X+y)a$, de donde sacarémos $y = \frac{naX}{b-na}$. Por consiguiente, si llamamos

mos Y la tension total del cordon 4, tendremos Fig.
$Y = \frac{X}{2} + \frac{naX}{b-na}$. 50.

3.° Discurriendo del mismo modo acerca de la polea C, y llamando z la fuerza que se le ha de añadir á la tension del cordon 6 para contrarestar el rozamiento; Z, la tension total del mismo cordon, tendremos $z = \frac{naY}{b-na}$, $Z = \frac{Y}{2} + \frac{naY}{b-na}$.

4.° Si llamamos u la fuerza que se le ha de añadir á la tension del cordon 8 para vencer el rozamiento de la polea D; V, la tension total del mismo cordon, ó la potencia Q, tendremos $u = \frac{naZ}{b-na}$, $V = \frac{Z}{2} + \frac{naZ}{b-na}$.

Es tan patente la ley en fuerza de la qual se originan las unas de las otras las tensiones X, Y, Z, V, que no puede haber dificultad alguna para calcular estas cantidades, sea el que fuere su número.

Supongamos $P = 800$ libras, el rozamiento $= \frac{1}{5}$ de la presion, y el radio del ege $= \frac{1}{6}$ del de la polea, será $\frac{na}{b-na} = \frac{1}{29}$; tendremos, pues, $X = 427\frac{17}{29}$ lib.; $Y = 228\frac{452}{841}$ lib.; $Z = 122\frac{3641}{24389}$ lib.; $V = 65\frac{202785}{707281}$ lib.

Será, pues, de 65 libras, y algo mas la potencia que deberá obrar en Q por razon del rozamiento, sin cuya resistencia bastaría una fuerza de 50 libras.

155. Consideraremos otro caso acerca de las poleas, y supondremos dos garruchas compuestas de 51.
dos poleas cada una, la una fija, y asegurada en E, la otra mobil de la qual cuelga un peso P. Supondremos iguales unas con otras todas las poleas, y tambien iguales unos con otros todos los eges que atraviesan cada par de poleas; y finalmente que abrace las poleas una misma cuerda, que tiene el un cabo atado en D á las armas de la garrucha superior, tirando del otro cabo una potencia Q.

Sean

Fig. 51. Sean 1 y 2 los cordones que abrazan la polea K; 2 y 3 los cordones que abrazan la polea F &c. Representará n como antes la razon entre el rozamiento y la presion; a, los radios de cada ege; b, los radios de cada polea.

Sentado esto, en el simple estado del equilibrio, cada uno de los cordones 1, 2, 3, 4, 5 se mantiene tirante por la accion de una fuerza igual á la quarta parte (149) del peso P. Sea a la fuerza que se le ha de añadir á la tension del cordon 2 para vencer el rozamiento que obra en el ege de la polea K; X, la tension total del mismo cordon 2, hallaremos por el mismo camino que antes $bx = n\left(\frac{P}{2} + x\right)a$, de donde sacarémos $x = \frac{\frac{naP}{2}}{b-na}$, y por consiguiente

$$X = \frac{P}{4} + \frac{\frac{naP}{2}}{b-na}.$$

Sea y la fuerza que se le ha de añadir á la tension del cordon 3 para superar el rozamiento de la polea F; Y, la tension total del mismo cordon, tendremos $y = \frac{2naX}{b-na}$, $Y = X + \frac{2naX}{b-na}$.

Sea z la fuerza que es preciso añadir á la tension del cordon 4 para vencer el rozamiento de la polea G; Z, la tension total del mismo cordon; tendremos $z = \frac{2naY}{b-na}$, $Z = Y + \frac{2naY}{b-na}$.

Sea finalmente u la fuerza que se le ha de añadir á la tension del cordon 5 para sobrepujar el rozamiento de la polea C; V, la tension total del cordon 5 ó la potencia Q, tendrémos $u = \frac{2naZ}{b-na}$, $V = Z + \frac{2naZ}{b-na}$.

Para aplicar estas fórmulas á un caso particular, su-

supongamos $P = 800$ libras, $a = \frac{1}{4}$, $\frac{a}{b} = \frac{1}{6}$, Fig.
$\frac{aa}{b-aa} = \frac{1}{23}$; resultará $X = 217\frac{9}{23}$ libras; $Y = 236\frac{156}{529}$ lib.; $Z = 256\frac{10248}{12167}$ lib.; $V = 279\frac{49361}{279841}$. Pide, pues, el rozamiento una fuerza de 279 libras, siendo así, que si no fuera por esta resistencia bastaría una de 200 libras.

Del Torno.

156 Sobre dos apoyos *AA* descansa un cilindro 52.
BB, cuyos extremos pueden dar vueltas con desahogo en las muescas de los dos apoyos. Perpendicularmente á este cilindro, que tambien se llama *tambor*, está asegurada una rueda *R*, á la qual la potencia procura hacer dar vueltas. Al dar vueltas hace que tambien las dé el tambor, al qual está atada una cuerda *CC* que sostiene el peso, y le vá levantando poco á poco, al paso que el cilindro dá vueltas. Todas estas piezas juntas componen el torno, que es una máquina de muchísimo uso.

Muchas veces en lugar de la rueda hay una cigüeña ó dos palancas que atraviesan el cilindro; pero bien se echa de ver que si consideramos estas palancas como los radios de una rueda, esta máquina es la misma que la primera. Si hay alguna diferencia, toda está en que la revolucion del tambor quando se hace con las palancas es menos uniforme que quando se hace con la rueda; pero tambien el volumen de las palancas es menos embarazoso.

157 Sea *AB* el ege del cilindro que descansa so- 53.
bre los dos extremos *A*, *B*; *DFE*, la circunferencia de la rueda, á la qual está aplicada la potencia *P*, n la direccion de la tangente *FMP*; sea *H* el punto donde la cuerda *HQ* toca la superficie del cilindro,

Fig. dro, estando figurado en GH su radio ó la perpen-
53. dicular tirada desde el punto H al ege AB. Figurémonos últimamente que la recta CMO representa la interseccion del plano vertical DFE de la rueda con el plano orizontal ABH.

Sentado esto, si concebimos la potencia P aplicada en M y figurada en MN, la podrémos resolver en dos fuerzas, la una orizontal cuya expresion es MO, la otra vertical figurada en MR. Pero la primera está en la direccion del punto C; luego la consume la resistencia del ege, y todo su conato se dirige á cargar orizontalmente los apoyos A y B. Luego de estas dos fuerzas no hay mas que la segunda que se equilibre con el peso Q el qual obra en la direccion HQ.

Luego si imaginamos la palanca MKH cuyo apoyo está en K, tendremos para el equilibrio $MR : Q :: HK : MK$ (131); fuera de esto, los triángulos KMC, KGH son semejantes, y son tambien los triángulos MNR, MFC; tendremos, pues, 1.° $HK : MK$, ó $MR : Q :: GH : CM$, ó $MR \times CM = Q \times GH$; 2.° $MR : MN :: CF : CM$, ó $MR \times CM = MN \times CF$; de donde sacarémos $Q \cdot GH = CF \cdot MN = CF \cdot P$; y quiere decir que *para el equilibrio en el torno es preciso que la potencia aplicada á la rueda, sea al peso como el radio del cilindro es al radio de la rueda*; ó, lo que viene á ser lo propio, hay equilibrio en el torno, quando los momentos de la potencia y del peso, tomados respecto del ege son iguales.

158 Para determinar la carga de los dos apoyos A y B, es preciso resolver la fuerza orizontal MO, ó $\frac{MF}{CM} \cdot P$ en otras dos, que la una se dirija ácia A, la otra ácia B. La que pasare por A será $Aa = \frac{MF}{CM} \cdot \frac{CB}{AB} P$; la que pasare por B será $Bb' = \frac{MF}{AC} \cdot \frac{AC}{AB} \cdot P$,

Co-


UNIV.
OF
MICH.

Como las dos fuerzas verticales *MR* y *Q* se reducen á sola una, $Q + MR$ ó $Q + \frac{CF}{CM} P$, que pasa por *K*, la resolveremos en otras dos fuerzas verticales dirigidas ácia *A* y *B*, siendo $\frac{KB}{AB}\left(Q + \frac{CF}{CM} P\right)$ la expresion de la primera *Aa*, y $Bb = \frac{AK}{AB}\left(Q + \frac{CF}{CM} P\right)$ la expresion de la otra. Por consiguiente si concluimos los paralelogramos rectángulos $Aa'a''a$, $Bb'b''b$, las diagonales Aa'' Bb'' expresarán las cargas de los apoyos *A* y *B*. Fig. 53.

159 Como la cuerda que sirve en esta máquina suele ser de mucho diámetro, y la accion de la potencia se comunica al peso por el ege mismo de la cuerda, se debe añadir el semidiámetro de la cuerda al radio del cilindro ó al radio de la rueda. Esta es la razon por que es preciso aumentar la potencia, quando despues que la cuerda ha dado una vuelta á todo el cilindro, empieza á dar otra.

160 Quando el ege del torno en vez de ser orizontal es perpendicular, esta máquina se llama *cabestante*.

De las Ruedas dentadas.

161 Quando muchas ruedas dentadas *V*, *X*, *Y*, *Z* se comunican unas con otras por medio de los piñones *u*, *x*, *y*, *z* se puede averiguar del modo siguiente la razon que hay entre la potencia *Q* aplicada á la primera de las ruedas, y el peso *P* que el último piñon puede sostener. Sean R, R', R'', R''' los radios de dichas ruedas; r, r', r'', r''' los de sus piñones. Considerarémos la fuerza que el ala de un piñon qualquiera hace en el diente de la rueda inmediata, como una potencia aplicada á esta; por consiguiente si llamamos E, E', E'' dichas fuerzas, tendremos por lo dicho (157) $Q : E :: r : R$; $E : E' :: r' : R'$; 54.

Fig. $E' : E'' :: r'' : R''$; $E'' : P :: r''' : R'''$; de donde, multipli-
54. cando por orden, sacarémos $Q : P :: rr'r'' : RR'R''R'''$; esto es, *que la potencia es al peso, como el producto de los radios de todos los piñones, es al producto de los radios de todas las ruedas.* Si el radio de cada piñon fuese v. gr. 10 veces menor que el de su rueda, una potencia de una libra sostendrá un peso de 10000 libras.

Pero si por una parte las ruedas dentadas aumentan la fuerza, por otra parte hacen perder tiempo, porque disminuyen la velocidad. Con efecto, mientras la rueda V dá una vuelta, el piñon u, que tambien dá una vuelta, hace pasar tantos dientes no mas de la rueda X como alas tiene él; por manera que si la rueda X tiene 48 dientes, y el piñon u 6 alas, la rueda X no dá mas que la octava parte de una vuelta, mientras que la rueda V dá una vuelta entera; del mismo modo se prueba que la rueda Y anda mas despacio que la rueda X; y así de las demas.

162 Veamos ahora como se puede aumentar la velocidad en una razon dada por medio de las ruedas dentadas.

Sea una rueda dentada V que engarganta con un
55. piñon u; es evidente que mientras la rueda V diere una vuelta, el piñon u dará tantas vueltas quantas veces el número de sus alas cupiere en el número de los dientes de la rueda V; quiero decir, que mientras la rueda V dá una vuelta, el piñon u dará un número $\frac{N}{n}$ de vueltas, siendo N el número de los dientes de la rueda, y n el número de las alas del piñon.

Luego si el ege del piñon lleva una rueda X, que tambien entre en un piñon x, mientras la rueda X ó el piñon u diere una vuelta, dará el piñon x un número $\frac{N'}{n'}$ de vueltas, siendo N' el número de los dien-

tes

tes de la rueda X, y n' el número de las alas del piñon x. Luego mientras la rueda X diere un número $\frac{N}{n}$ de vueltas; esto es, mientras la rueda V diere una vuelta, dará el piñon x un número $\frac{N'}{n'} \times \frac{N}{n}$ ó $\frac{NN'}{n'n}$ de vueltas. Y si consideráramos un número mayor de ruedas y piñones, hallaríamos que mientras la primera rueda diere una vuelta, el último piñon dará un número de vueltas expresado con un quebrado cuyo numerador es el producto de los números de los dientes de todas las ruedas, y el denominador el producto de los números de las alas de todos los piñones. Fig. 55.

163. Propongámonos averiguar quantos dientes han de llevar las dos ruedas V, X, y quantas alas los piñones u, x, para que el piñon x dé 50 vueltas, mientras dá una la rueda V. Tendremos, pues, $\frac{NN'}{nn'} = 50$. Aquí conocemos el cociente de NN' partido por nn', pero no conocemos ni el dividendo ni el divisor. Tomemos á arbitrio por el divisor nn' un número compuesto de dos factores que no sean ni muy pequeños, ni muy grandes, á fin de que no excedan los números de las alas que puedan llevar los piñones. Supongamos v. gr. $nn' = 7 \times 8 = 56$. Podremos suponer $n = 7$ y $n' = 8$. En virtud de esto tendremos $\frac{NN'}{56} = 50$, ó $NN' = 50 \times 56$; pero como ni 50 ni 56 no exceden el número de los dientes que se le pueden dar á cada rueda, supondremos $N = 50$, y será por lo mismo $N' = 56$. Si estos dos factores, ó el uno de ellos hubiera sido muy grande, los hubiéramos resuelto en todos sus factores primos, para ver si de la combinacion de estos factores, resultaban dos factores menores; donde no, hubiéramos tomado por nn' otro número.

Indaguemos tambien v. gr. qual ha de ser el número-

Fig. 55. mero de los dientes de tres ruedas y el de las alas de tres piñones, para que en el tiempo que el último piñon dá una vuelta en 12 horas, la primera rueda dé una vuelta en un año.

Como el año comun es de 525949 minutos, y 12 horas valen 720 minutos, es patente que mientras la primera rueda dá una vuelta, el último piñon dará $\frac{525949}{720}$ vueltas; tenemos, pues, $\frac{NN'N''}{nn'n''} = \frac{525949}{720}$; hagamos á arbitrio $n = 7$, $n' = 8$; tendremos $\frac{NN'N''}{7.8.n''} = \frac{525949}{720}$ ó $NN'N'' = \frac{525949}{720} \times 7 \times 8n'' = \frac{3681643n''}{90}$. Pero como es preciso que $NN'N''$ sea un número entero, es evidente que para resolver cabalmente la cuestion, deberíamos tomar por n'' un múltiplo de 90; y como este múltiplo sería muy grande para poder ser el número de las alas del piñon; hemos de ver si con añadirle ó quitarle un corto número de unidades al numerador del último quebrado, podremos hacer que sea un número entero; como este número discrepará poco del valor de $NN'N''$, le tomaremos por este producto.

Sea, pues, q el menor número de unidades que se le ha de quitar al numerador, y t el número entero que de aquí resulta, y podremos tomar por $NN'N''$; tendremos, pues, $\frac{3681643n''-q}{90} = t$, ó $40907n'' + \frac{13n''-q}{90} = t$. Es, pues, preciso que $\frac{13n''-q}{90}$ sea un número entero; llamarémosle s, y será $\frac{13n''-q}{90} = s$, ó $n'' = \frac{90s+q}{13} = 6s + \frac{12s+q}{13}$. Hago $\frac{12s+q}{13} = r$, y sale $s = \frac{13r-q}{12} = r + \frac{r-q}{12}$. Finalmente hago $\frac{r-q}{12} = k$, y sale $r = 12k+q$. Luego $s = 13k+q$, y $n'' = 90k+7q$. Pero como es preciso que n'' sea pequeño, haremos $k = 0$, y con darle á q el menor valor posible en números enteros, haremos $q = 1$. Tendremos

mos, pues, $n''=7$, y t ó $NN'N''=286350$. Resta saber ahora si este número se puede resolver en tres factores que se puedan tomar por los números de los dientes N, N', N''; pueden con efecto resolverse tres factores que tengan esta circunstancia, los quales son 50, 69, 83 que no son muy grandes para el caso. Se puede, pues, conseguir lo que viene propuesto en la cuestion, disponiendo como se quisiere tres ruedas de 50, 69 y 83 dientes, y tres piñones de 7, 7 y 8 alas. Fig.

Si el valor numérico de $NN'N''$ que por este camino se halla, no tuviese factores á propósito para expresar el número de dientes que con comodidad se pueden abrir en las ruedas, sería preciso repetir la operacion dando otros valores á q, ó á n, ó á n'.

Aunque no es mas que aproximada la resolucion que se alcanza omitiendo, conforme lo hemos practicado, algunas unidades, es no obstante bastante cabal. Porque en el caso propuesto, el número de vueltas que dá el último piñon en el tiempo que la primer rueda dá una vuelta, es $\frac{NN'N''}{nn'n''}=\frac{286350}{7.7.8}$; si multiplicamos esta cantidad por 12 horas, que ha de durar cada vuelta, hallarémos que la revolucion de la primera rueda durará $365^d\ 5^h\ 48'\ 58''\ \frac{38}{49}$, y supusímos que el año se compone de $365^d\ 5^h\ 49'$.

Del Cric ó Gato.

164 En esta máquina obra la potencia por medio de una cigüeña $AMNP$ cuyo exe NP lleva un piñon P, el qual engarganta con la barra dentada CD, y la empuja ácia arriba. Se viene á los ojos que para que se verifique el equilibrio en esta máquina, la potencia aplicada á la cigüeña ha de ser á la fuerza que procura levantar la barra CD, como el radio del piñon es al radio MN de la cigüeña (157). 56.

Fig. 57. Y como el primer radio es mucho menor que el segundo, se pueden levantar con el cric pesos muy grandes. Pero será mucho mayor el efecto de esta máquina, si se añade una rueda y un piñon mas, porque entonces (161) la potencia aplicada á la cigüeña es á la fuerza que procura levantar la barra *CD*, como el producto de los radios de los piñones *P*, *R* es al producto del radio de la rueda *N*, por el radio *MN* de la cigüeña.

Del rozamiento en el Torno.

58. 165 Representa el círculo *OMC* el corte del tambor de un torno orizontal que levanta un peso *P* atado con la cuerda *MP* aplicada al mismo tambor; el circulillo *x* es el corte del exe de la máquina; el círculo *BRD* es el corte de la rueda á que está aplicada la potencia motriz obrando en una direccion tangente qualquiera *DF*.

El peso *P* hace en el centro ó exe *A* del movimiento, una presion vertical igual con él, cuya presion figurarémos en la vertical *AO*. Supongamos que *F* es la fuerza que basta para mantener en equilibrio el peso *P*; y *x* la fuerza que se le ha de añadir á *F* para vencer el rozamiento. Represente *DE* la fuerza $F+x$, y resolvámosla en otras dos *DK*, *DH*, la una vertical, y la otra orizontal. La fuerza vertical *DK* causa en el centro *A* una presion igual con ella; de suerte que si hacemos $ON = DK$, la presion vertical que aguanta el centro se podrá figurar en *AN*. La fuerza orizontal *DH* causa en el centro *A* una presion orizontal *AL* igual con ella. Por consiguiente, si concluimos el paralelogramo rectángulo *ANQL*, su diagonal *AQ* representará la presion que resulta en el punto *q* de la superficie del exe, cuya presion ocasiona el rozamiento al qual hemos de considerar co-

como una fuerza cuya direccion toca en el punto q el círculo x. Fig. 58.

Llamemos el radio Aq del exe, a; el radio AO del tambor, b; el radio AD de la rueda, c; el seno total, 1; el seno del ángulo HDE, que conocemos, f; el coseno del mismo ángulo $= \sqrt{(1-ff)}$, g; la razon entre el rozamiento y la presion, n.

La expresion de la fuerza DK será $(F+x)f$; la de la fuerza DH ó AL será $(F+x)g$; la de la fuerza AN será $P+(F+x)f$; la de la fuerza AQ será $\sqrt{[(F+x)^2gg+(P+(F+x)f)^2]}$ y la del rozamiento $n\sqrt{[(F+x)^2gg+(P+(F+x)f)^2]}$.

Sentado esto, por la naturaleza del equilibrio, el momento de la fuerza x ha de ser igual al momento del rozamiento; tendremos, pues, la equacion $cx = an\sqrt{[(F+x)^2gg+(P+(F+x)f)^2]}$, y si consideramos que por ser siempre vertical ó casi vertical la direccion de la fuerza F, es sensiblemente por lo menos, $g=0$, $f=1$ (I. 709), sacarémos $cx = an\sqrt{[(P+F+x)^2]}$ ó $cx = an(P+F+x)$, ó $cx = anP+anF+anx$, que dá $cx-anx = anP(P+F)$, ó $x = \frac{an(P+F)}{c-an}$, cuya expresion se reduce á $x = \dfrac{an\left(P+\frac{Pb}{c}\right)}{c-na}$ con substituir en lugar de F su valor $\frac{Pb}{c}$ (157).

Supongamos $P = 600$ libr., $n = \frac{1}{5}$, $\frac{b}{c} = \frac{1}{6}$, $\frac{a}{b} = \frac{1}{6}$; saldrá $x = 3\frac{163}{179}$ libr.; cuyo valor está diciendo que para vencer el rozamiento se necesitará una fuerza de unas 4 libras. Por consiguiente la potencia qué, si no fuera por el rozamiento, hubiera sido de 100 libras no mas, ha de ser de 104 libras por causa de esta resistencia.

Fig.

Del Plano inclinado.

166 Dexamos determinadas (111) las condiciones que deben concurrir para que un cuerpo puesto sobre un plano orizontal se mantenga en equilibrio; es preciso en general que la vertical tirada por su centro de gravedad no dexe á un lado todos sus apoyos. Veamos ahora en que estriba el equilibrio de un cuerpo sobre un plano inclinado.

Por decontado se echa de ver que las fuerzas que solicitan este cuerpo deben todas reducirse á una fuerza perpendicular al plano inclinado; donde no, no se verificará el equilibrio. Hecha esta reduccion, es patente que el plano aniquilará la derivada, y que por lo mismo el cuerpo se mantendrá inmobil. Será imposible que se mueva en el caso de no estar todos sus apoyos á un mismo lado de la derivada.

59. 167 Sea *P* la potencia que mantiene al cuerpo en equilibrio; *G*, el centro de gravedad de este cuerpo; *GQ*, la vertical tirada por dicho centro, la qual encuentra en *M* la direccion de la potencia. Supongamos ahora que *MR* representa la fuerza *P*, y la linea *MQ* el peso *G*; despues de concluido el paralelogramo *MQNR*, la diagonal *MN* representará la derivada, la qual, segun diximos, debe ser perpendicular al plano para que se consuma. Por consiguiente la primera condicion para el equilibrio en el plano inclinado es que el centro de gravedad y la direccion de la potencia estén en un mismo plano perpendicular al plano inclinado.

Sea *AB* la seccion del plano *QMP* con el plano sobre el qual se ha de hacer el equilibrio; *BC*, la linea orizontal tirada por *B* (llámase la *basa* del plano inclinado); *AC*, la vertical tirada por *A* (llámase la *altura* del plano inclinado); *BC* es su longi-

gitud; y el ángulo ABC mide su inclinacion. Fig.

168 La segunda condicion indispensable para el equilibrio, es que la derivada MN sea perpendicular á AB; por otra parte la potencia P es al peso G, como $MR : MQ ::$ sen QMN : sen NMR (24); y la misma potencia es á la presion que padece el plano, como $MR : MN ::$ sen QMN : sen QMR (24). 59.

Pero de la proporcion de antes podemos inferir que la potencia P será la mínima posible siempre que el ángulo NMP sea recto, ó lo que es lo propio, siempre que la direccion MP sea paralela al plano; porque entonces la potencia es al peso, como sen QMN es á la unidad. Y como en este caso los triángulos QMN, ABC son semejantes, tendremos esta proporcion: *la potencia es al peso como el seno de la inclinacion del plano respecto del orizonte, es al seno total, ó como la altura del plano es á su longitud.*

169 Si fuere MP' la direccion de una potencia paralela á la base del plano, se verificará igualmente que la potencia P' es al peso $G :: MR' : MQ' ::$ sen $Q'MN$: sen NMR'; y como los triángulos $Q'MN$, y ABC son semejantes, sacarémos esta proporcion: *la potencia es al peso, como la altura del plano inclinado es á su base.*

170 Para que un cuerpo se mantenga en equilibrio entre dos planos inclinados AB, AC, es preciso que haya en la vertical tirada por su centro de gravedad, un punto G por lo menos, tal que las perpendiculares Gg, Gn tiradas á los dos planos, estén en un solo plano vertical, de modo que no dexen de un mismo lado todos los apoyos del cuerpo en cada plano. Es, pues, preciso que la interseccion comun de los dos planos sea una recta orizontal EF. 60.

El peso del cuerpo que podemos figurar en GM se resuelve en dos fuerzas GQ, GN, las quales expresan las presiones con que obra en los dos planos

Fig. inclinados. Luego si las llamamos Q y N, y G el peso del cuerpo, tendremos $G : Q : N :: GM : GQ : GN$ $::$ sen QGN : sen MGN : sen MGQ :: sen BAC : sen CAE : sen BAE.

61. 171 Supongamos dos cuerpos A y B atados con el cordon ACB, que pasa por la polea C, los quales se equilibran en los planos inclinados ED, DF. Sea MN la vertical tirada por el centro de gravedad del cuerpo A, y MN el peso del cuerpo; le resolveremos en dos fuerzas la una MO perpendicular al plano DE, la otra MP en la direccion del hilo CM.

Executando la misma resolucion respecto del otro cuerpo, QT será la fuerza con que tira del hilo BCM. Tendremos, pues, para el equilibrio $MP = QT$ ó $\frac{A \cdot \text{sen } NMO}{\text{sen } CMO} = \frac{B \cdot \text{sen } RQS}{\text{sen } CQS}$. Y si los hilos CB, CA fuesen paralelos á los planos DE, DF, la última equacion se transformará en A. sen $DEG = B$. sen DFG, á la qual podemos dar esta forma $A . \frac{DG}{DE} = B . \frac{DG}{DF}$, de donde se saca $\frac{A}{DE} = \frac{B}{DF}$, ó $A : DF = B . DE$; y finalmente $A : B :: DE : DF$. Sería, pues, preciso en este caso que los pesos de los dos cuerpos A y B fuesen como las longitudes de los planos DE, DF sobre que descansan.

Del rozamiento en el Plano inclinado.

62. 172 Sea P un peso puesto sobre un plano inclinado cuya longitud es HG; la altura, HI; y la base IG. Figuremos este peso en la vertical PD, y resolvamos esta fuerza en otras dos PC, PA, la una paralela, y la otra perpendicular á la longitud del plano. Por lo dicho (168) será fuerza $PC = P \times \frac{HI}{HG}$; fuerza $PA = P \times \frac{IG}{HG}$. Por el impulso de la primera fuerza que, segun diximos, se llama la pesantez

tez relativa del cuerpo, este resbalaría; el impulso Fig.
de la segunda causa la presion en el plano inclinado, 62.
de la qual resulta un rozamiento de la primera especie; por manera que si llamamos n la razon entre el rozamiento y la presion, tendremos el rozamiento $= nP \times \frac{IG}{HG}$. Luego si el peso quedára entregado á sí mismo, solo baxaría quando su pesantez relativa *PC* fuese mayor que el rozamiento, esto es, quando fuese $\frac{P \times IH}{HG} > nP \times \frac{IG}{HG}$, ó $IH > n \times IG$.

De donde se sigue *que un cuerpo puesto sobre un plano inclinado, y entregado al impulso de la gravedad, no baxará sino quando la altura del plano inclinado sea mayor que el producto de la basa multiplicada por la razon que hay entre el rozamiento y la presion.*

173 Supongamos que el cuerpo esté para baxar, ó que su pesantez relativa sea igual á la resistencia del rozamiento, tendremos $IH = n \times IG$, ó $n = \frac{IH}{IG}$. Por consiguiente, quando la inclinacion del plano inclinado es tal, que el cuerpo empieza á baxar á impulsos de sola su pesantez relativa, la razon entre el rozamiento y la presion es la misma que la de la altura del plano inclinado con su basa. Luego en conociendo la primera razon, conoceremos la segunda, y recíprocamente.

Supongamos v. gr. que el rozamiento sea el tercio de la presion, será $\frac{IH}{IG} = \frac{1}{3}$. Pero sabemos que siendo (I. 725.) *GI* el radio, la razon $\frac{IH}{IG}$ expresará la razon entre la tangente del ángulo *IGH* de inclinacion del plano, y el seno total; y por las tablas sabemos que siendo $\frac{1}{3}$ esta última razon, el ángulo *HGI* es de unos $18^\circ\ 27'$. Por consiguiente, en el supuesto de ser el rozamiento el tercio de la presion, el ángulo de inclinacion del plano ha de ser de unos $18^\circ\ 27'$, á fin de que el cuerpo esté para baxar á impul-

Fig. pulsos de su sola gravedad relativa.

62. Si al contrario fuese dado el ángulo de inclinacion del plano, las tablas nos darian la razon $\frac{IH}{IG}$, y despues sacaríamos el valor de n de la equacion $n = \frac{IH}{IG}$. Esto está enseñando como se puede determinar el rozamiento de la primera especie por medio de la experiencia. Para cuyo fin se pondrá un cuerpo sobre un plano poco inclinado al orizonte; se irá aumentando poco á poco la inclinacion, hasta que el cuerpo empiece á baxar; entonces se reparará la razon entre la altura del plano inclinado y su basa; esta razon será la del rozamiento con la presion.

174 Para calcular el rozamiento en el plano inclinado, considerarémos los dos casos mas ordinarios; es á saber, quando la direccion de la potencia es paralela á la longitud ó á la base del plano.

Supongamos, pues, primero que la potencia Q sea paralela á la longitud del plano inclinado. Para que el cuerpo empiece á escurrirse en la direccion GH, es preciso que la fuerza Q sea igual á la suma de la pe-

63. santez relativa del cuerpo y del rozamiento. Pero despues de formado el paralelogramo rectángulo $PADC$, tendremos (168) fuerza $PC = P \times \frac{HI}{HG}$, fuerza $PA = P \times \frac{IG}{HG}$; y si llamamos n la razon entre el rozamiento y la presion, el rozamiento será $= nP \times \frac{IG}{HG}$. Luego será $Q = P \times \frac{HI}{HG} + nP \times \frac{IG}{HG}$, cuya fórmula manifiesta el aumento que se le debe dar á la fuerza Q por causa del rozamiento.

Sea $P = 8000$ lib. el ángulo de inclinacion HGI del plano, de 30°, ó $\frac{HI}{HG} = \text{sen } 30^\circ$ (I. 720) $= \frac{1}{2}$ (I. 705), $\frac{IG}{HG} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866$, con corta diferencia; $n = \frac{1}{3}$. Tendremos $Q = 4000$ libr. $+ 2309{,}333$ libr. Por consiguiente la potencia Q pasará un

un poquito de 6309 libras, siendo así que si no hu- Fig.
biera rozamiento sería de 4000 libras no mas.

175 Supongamos ahora que la potencia Q sea 64.
paralela á la base del plano inclinado. Resolveremos como antes el peso del cuerpo en dos fuerzas PC, PA, la una paralela, la otra perpendicular al plano inclinado, y tambien resolveremos la potencia Q, figurada en la parte PO de su direccion, en otras dos fuerzas PN, PM, la una paralela, la otra perpendicular á la longitud del plano. Tendremos (168) fuerza $PC = P \times \frac{HI}{GH}$, fuerza $PA = P \times \frac{IG}{HG}$, fuerza $PN = Q \times \frac{IG}{HG}$, fuerza $PM = Q \times \frac{IH}{HG}$. Como la presion total del plano inclinado es igual á la suma de las dos fuerzas PA, PM; si llamamos n la razon entre el rozamiento y la presion, tendremos el rozamiento $= n \times \left(P \times \frac{IG}{HG} + Q \times \frac{IH}{HG}\right)$. Sentado esto, para que el cuerpo empiece á escurrirse en la direccion GH, es preciso que la fuerza PN sea igual á la suma de la fuerza PC, y del rozamiento; luego con esto será $\frac{Q \times IG}{HG} = \frac{P \times HI}{GH} + n\left(P \times \frac{IG}{HG} + Q \times \frac{HI}{HG}\right)$; de donde se saca $Q = \frac{P \times (HI + n \times IG)}{IG - nIH}$.

Si no hubiera rozamiento, el valor de la potencia sería $\frac{P \times HI}{IG}$. Luego $\frac{P \times (HI + n \times IG)}{IG - n \times IH} - \frac{P \times HI}{IG}$, ó $\frac{nP \cdot (HG)^2}{(IG)^2 - n \times IG \times IH}$ es el aumento que necesita la potencia por razon del rozamiento.

Sea $P = 8000$ lib.; el ángulo $HGI = 30^\circ$, ó $HI = \frac{1}{2}$, $\frac{IG}{HG} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866$; $n = \frac{1}{3}$. Sacarémos $Q = 9022$ libr. con corta diferencia; si no hubiese rozamiento, bastaría una potencia de 4619 libr.

De la Rosca.

176 Llámase *rosca* un cilindro sobre cuya superfi-

Fig. ficie se ha cortado un cordon ó filete sólido que le abraza en forma de linea espiral ó de caracol, y le coge desde el un extremo al otro. Dá, pues, este cordon espiral muchas vueltas sobre la superficie cilíndrica, de modo que todas sus partes están igualmente inclinadas á lo largo del cilindro, de donde resulta que todas las vueltas que dá el cordon están á igual distancia unas de otras. Esta distancia se mide no con la distancia perpendicular desde una vuelta ó *helice* á la inmediata, sino en la direccion de la longitud del cilindro. Cada vuelta del cordon espiral se llama *espira* ó *helice*; tambien se llama *paso de la rosca*, y la distancia de una espira á la inmediata se llama *al-*
65. *tura del paso* de la rosca. Si en la superficie del cilindro imaginamos una linea *AB* paralela al exe *GH*, y que una parte del cordon espiral qual es *BEA* abraza el cilindro subiendo como gradualmente desde el punto *B* de la *AB*, hasta el punto *A* de la misma linea, se habrá trazado una espira ó helice, y la linea *AB* será el intervalo que hay entre dos espiras, la espira *BEA* empieza en el punto *B*, y acaba en el punto *A*, donde empieza la helice siguiente.

Quando el cordon espiral está en la superficie cóncava de un cilindro hueco, la rosca se llama *tuerca*.

177 Es patente que si el diámetro de la tuerca es igual con el diámetro de la rosca, y los intervalos de las espiras de la tuerca son iguales á los intervalos de las espiras de la rosca, la rosca podrá introducirse en la tuerca, y las espiras del un cilindro quadrarán perfectamente con las del otro, del mismo modo que dos sortijas de igual tamaño que se tocasen en todos los puntos de su circunferencia; y si se le hacen dar vueltas al uno de los dos cilindros, las espiras de la rosca que se mueve resbalarán dando vueltas por encima de las espiras del cilindro que se queda inmobil, y subirán como por planos inclinados.

Si

178 Si se resuelve una porcion de todo el cilindro, siendo la altura AB igual á la altura del paso de la rosca, resultará un paralelogramo $ABBA$ cuyos lados opuestos AB, AB son iguales á la altura del paso de la rosca, y los lados AA, BB son iguales á las circunferencias de las dos bases superior é inferior del cilindro; la parte BEA, que es una de las vueltas del cordon espiral ó una de las espiras que le componen, será la diagonal del paralelogramo $ABBA$. Porque la espira BEA forma, despues de tendida en plano una linea recta, una vez que por la hipótesi esta linea forma con AB y las lineas que con ella son paralelas, ángulos iguales. De donde se sigue, segun dexamos ya apuntado, que quando las espiras de la rosca mobil se mueven por las espiras de la rosca inmobil, resbalan por encima de ellas del mismo modo que un cuerpo que se mueve por un plano inclinado, el qual se alarga dando vueltas, y abraza la superficie convexá de la rosca y la cóncava de la tuerca, BEA es la longitud del plano inclinado; AB su altura, y BB su base. Fig. 66.

179 Si dividimos con el pensamiento toda la rosca en otros tantos cilindros, cuyas alturas sean iguales á la altura del paso de la rosca, la superficie de cada uno de estos cilindros menores será un paralelogramo cuya diagonal será la espira despues de tendida en plano. Esta espira tambien será un plano inclinado de altura igual á la del cilindro chico, y la base será igual á la circunferencia de la base del mismo cilindro; y todas estas diagonales puestas en linea recta á continuacion unas de otras formarán el cordon espiral, el qual enrollándose otra vez en la superficie del cilindro formará en ella un plano inclinado enroscado, el qual cogerá desde la una á la otra base del cilindro. Parece, pues, que la rosca es un plano inclinado doblado á manera de espira, y que la

ros-

Fig. rosca y la tuerca son tambien dos planos inclinados
66. puestos uno encima de otro.

180 Como lo mismo tiene, para los efectos de esta máquina, que esté fixa la tuerca y se mueva la rosca, ó al reves, supondremos inmobil la tuerca. En cuyo supuesto hemos de distinguir en esta máquina, quando obra, dos movimientos; con el uno las espiras de la rosca se mueven por las de la tuerca dando vueltas espiralmente y en la direccion que abrazan el cilindro; con el otro, la rosca camina en la direccion de su longitud, este último movimiento resulta del primero, pues un cuerpo que se mueve por un plano inclinado, sube á la altura del plano, siguiendo un camino obliquo y torcido.

Se viene á los ojos que la rosca aprieta ó empuja los obstáculos solo con su movimiento progresivo ó con la fuerza que hace para caminar ácia adelante; porque no hay duda en que si no hubiese mas movimiento que el circular, qual es el de la tapa de una caxa, no tendría fuerza alguna para comprimir ó impeler. Por consiguiente, toda su fuerza está en que su movimiento espiral se convierte en movimiento progresivo en la direccion del exe.

65. 181 Si la rosca al dar estas vueltas tropieza con un obstáculo que la potencia ó fuerza que la mueve venceria por poco que aumentára su conato, bien que no llegue este caso, hay equilibrio entre el obstáculo y la fuerza. Y como la rosca impele el obstáculo en la direccion del exe no mas, es patente que la resistencia del obstáculo sigue la misma direccion; luego la direccion de esta resistencia es paralela al exe, y obliqua á las espiras de la rosca.

182 Quando la rosca impele un obstáculo, este tambien impele la rosca, y todo el conato que gasta para superarle, recae en sus espiras que se hallan impelidas ácia atrás; pero como la potencia estorba que re-

retrocedan con un conato contrario, de aquí resulta una presion de las espiras de la rosca en las de la tuerca. Fig.

183 Hemos visto 1.° que cada espira de la rosca es un verdadero plano inclinado, cuya altura es igual á la del paso de la rosca, y la base igual á la circunferencia de la base del cilindro (178); 2.° que la resistencia del obstáculo que la rosca procura vencer obra en la direccion del exe, esto es, paralelamente á la altura del plano inclinado ó perpendicularmente á su base (181). Pero toda resistencia se puede comparar con un peso que comprima en la direccion de la resistencia; luego quando un obstáculo contraresta el movimiento progresivo de la rosca, la presion contraria que padecen sus espiras, causa el mismo efecto que si estas aguantasen un peso cuya pesantez obra en la misma direccion. Esto manifiesta que no hay diferencia entre la rosca y el plano inclinado, y que el equilibrio se ha de hacer de un mismo modo en ambas máquinas, suponiendo la potencia aplicada inmediatamente al peso que suponemos comprime las espiras de la rosca; porque una potencia que se equilibra con un peso en un plano inclinado le impide resbalarse por el plano. Asimismo, quando la rosca empuja ó comprime un obstáculo, sus espiras tambien padecen una presion que las solicita para que baxen por las espiras de la tuerca del mismo modo que un cuerpo puesto sobre un plano inclinado se halla impelido de su gravedad; pero la potencia que suponemos aplicada á las espiras de la rosca, se opone á este descenso con un conato contrario. Por consiguiente, si la potencia obrára inmediatamente en las espiras de la rosca, se determinaría la razon entre la potencia y el peso ó la resistencia, del mismo modo cabalmente en la rosca que en el plano inclinado; pero la potencia que impide que la rosca vuelva atrás quan-

Fig. quando comprime el obstáculo, obra por medio de
65. una palanca cuyo punto de apoyo está en el punto *O* del exe del cilindro. Aunque la palanca no llega hasta el punto *O* del exe, no dexa de ser uno mismo el efecto; porque si dicha palanca llegára hasta el punto *O*, sería este punto el centro del movimiento ó el punto fixo al rededor del qual la palanca se moviera; y aunque esta palanca no atraviese el cilindro para llegar al punto *O*, no por eso dexa de ser este punto el centro del movimiento, porque la rosca dá indefectiblemente vueltas al rededor de *GH*. Es, pues, la rosca una máquina compuesta de un plano inclinado y una palanca.

Para lo que hemos de demostrar, podemos suponer la palanca *OM* plantada en el punto que se quiera de la superficie del cilindro de la rosca, porque por ser inflexíble este cilindro, el impulso de la potencia se comunicaría con igual facilidad al obstáculo, el qual còn su resistencia comprimirá igualmente las espiras de la rosca. Supondremos tambien que la palanca encuentra el cilindro de la rosca en el mismo parage donde las espiras son comprimidas, y que esta presion, la qual se distribuye entre todas las que encuentran la tuerca, está como reconcentrada en el punto *S* de la espira *BEA* donde la palanca encuentra la superficie del cilindro. Supondremos finalmente que la potencia *P* que se equilibra con la resistencia del obstáculo, tira ó impele en una direccion perpendicular á la palanca, y paralela á la base del cilindro de la rosca. Todo esto presupuesto:

66. 184 Supongamos primero que la presion con que la resistencia del obstáculo ó del peso obra en la espira *BEA* la sostiene una potencia *N* inmediatamente aplicada al punto *S*, donde suponemos como reconcentrada esta presion. De la propiedad del plano inclinado (169) sacarémos $N : R :: AB : BDB$.

Pe-

Pero como la potencia *P* obra en la palanca *OM* á mayor distancia del punto *O*, obrará menos (131) en la razon de *OS* á *OM*, por manera que tendremos *P* : *N* :: *OS* : *OM*; ó, porque las circunferencias siguen la razon de sus radios *OS*, *OM*, será *P* : *N* :: circunferencia *BDB* del cilindro : la circunferencia que traza la palanca *OM*; quiero decir *P* : *N* :: *BDB* : *C*, llamando *C* la circunferencia del radio *OM*. Si multiplicamos ordenadamente los términos de esta proporcion por los de la que sacamos poco ha de la propiedad del plano inclinado, resultará *P* : *R* :: *AB* : *C*, y quiere decir que *la condicion del equilibrio en la rosca consiste en que la potencia sea al peso como la altura del paso de la rosca es á la circunferencia cuyo radio es igual á la distancia de la potencia al exe del cilindro.* Fig.

185 Por consiguiente quanto mas apretadas estén las espiras, y mas largo el brazo de palanca donde obra la potencia, tanto mayor será el efecto de la potencia.

186 La rosca sin fin es una máquina que se compone de una rosca y una rueda dentada, de cuyo exe cuelga un peso. Los dos extremos del exe de la rosca descansan sobre dos apoyos, igualmente que la rueda. La rosca no tiene tuerca, no se mueve progresivamente como quando la tiene; pero al dar vueltas al rededor de su exe por medio de la cigüeña *BCQ*, las espiras del cordon espiral de la rosca tropiezan con los dientes de la rueda, y el peso *P* que se opone al movimiento circular de la rueda, hace en dicho cordon una fuerza ó presion parecida á la que padece el cordon de la rosca simple quando está metida en la tuerca. Así, si el peso *P* estuviera inmediatamente en el punto *D*, la razon entre la potencia y el peso sería la misma que en la rosca simple (184); pero como la potencia *Q* no obra en el punto *P* sino con el 67.

co-

Fig. conato G que hace en el punto D, es preciso comparar
67. primero la potencia Q con el conato G, y despues el conato G con el peso P. Luego el paso de la rosca es á la circunferencia cuyo radio es BC; como la potencia Q aplicada á la cigüeña, es á la fuerza con que el punto G del cordon de la rosca empuja el diente de la rueda. Luego esta fuerza es $= \frac{Q \cdot \text{circ.}BC}{EF}$.

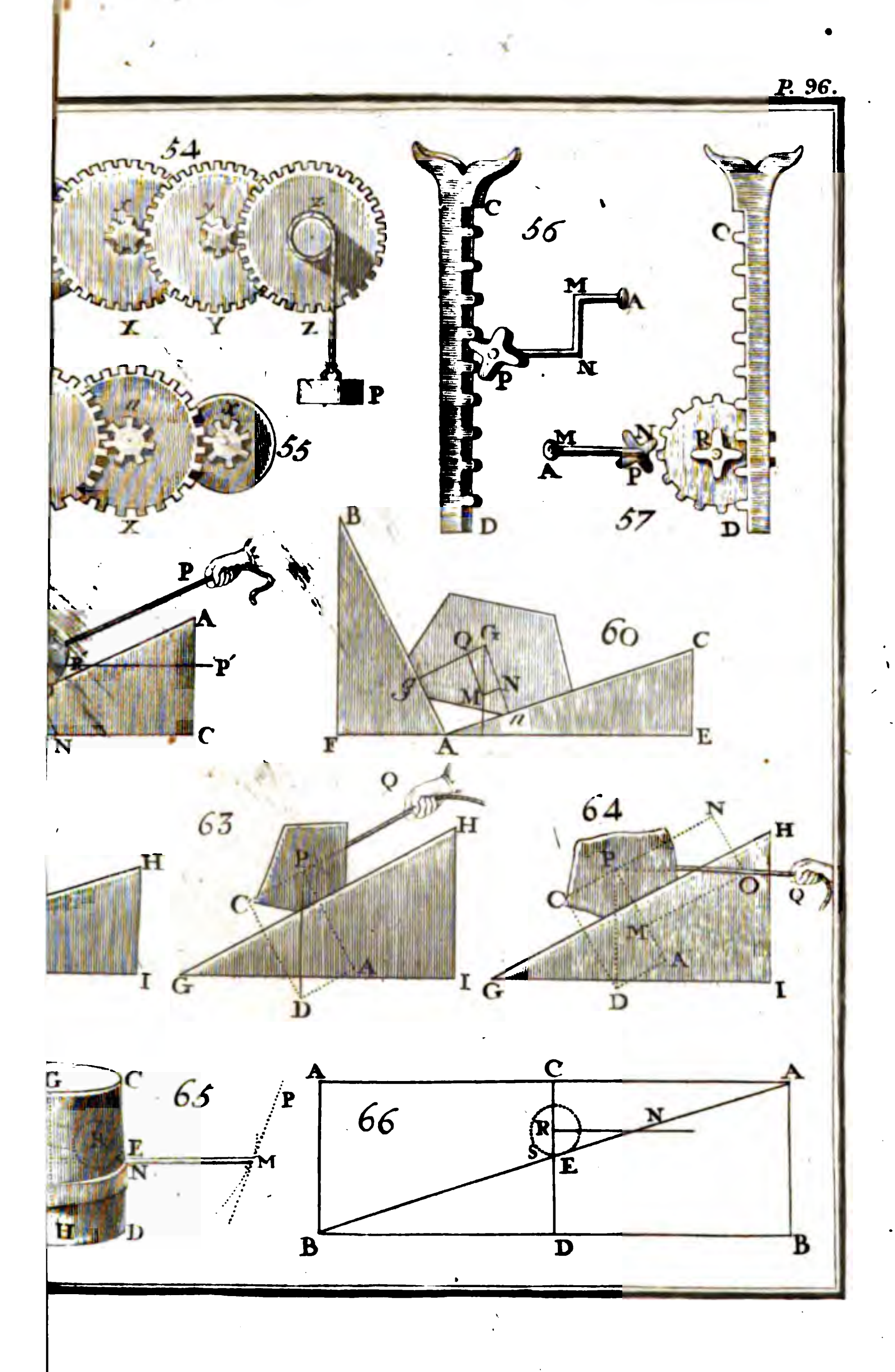
Por consiguiente, si llamamos r el radio LM del cilindro; R, el radio DM de la rueda, el momento de la fuerza que obra en G para levantar el peso P será $Q = \frac{Q \cdot \text{circ.}BC}{EF} \cdot R$, que ha de ser igual con $P \cdot r$ expresion del momento del peso, quiero decir que $\frac{Q \cdot \text{circ.}BC \times R}{EF} = P \cdot r$, ó $Q \cdot \text{circ.}BC \times R = P \times EF \times r$. que dá $Q : P :: EF \times r : \text{circ.}BC \times R$. Por consiguiente en *la rosca sin fin es preciso para el equilibrio, que la potencia aplicada á la cigüeña sea al peso, como el producto del radio del cilindro por el paso de la rosca, es al producto del radio de la rueda por la circunferencia que traza la cigüeña.*

Del rozamiento en la Rosca.

187 Ya que por lo dicho (179) se refiere la rosca al plano inclinado, el rozamiento se calcula del mismo modo en ambas máquinas. Pero son por lo comun tan toscas las roscas, y padecen sus movimientos tantas irregularidades, que son como fuerzas distintas del rozamiento, y no es posible calcular con la puntualidad que se requiere la potencia que se le debe aplicar para poner en movimiento un peso dado; por cuyo motivo no nos detendremos en este particular.

De la Cuña.

68. 188 Es la *cuña* una especie de prisma triangular hecho por lo comun de una materia muy dura, pongo por


54
X
Y
Z
P
55
X
56
C
M
A
N
P
D
57
R
B
60
C
Q
G
N
M
F
A
E
A
P'
N
C
63
Q
H
P
C
G
A
D
I
64
N
H
P
O
Q
C
M
G
D
I
H
I
G
C
65
P
E
N
M
H
D
66
A
C
A
R
N
S
E
B
D
B

por caso de hierro &c. y sirve para rajar cuerpos. Fig.
Los triángulos *ACB*, *DFE* se llaman las *dos bases* de la cuña; *BF* es su *corte*; *ABFD*, *CBFE* son sus dos *caras*, y *DACE* es la cabeza de la cuña.

189 Aunque es muy dificultoso de explicar el equilibrio en esta máquina, porque pende su explicacion de muchos conocimientos físicos sumamente variados, procuraremos no obstante dar á conocer la condicion en que estriba.

El efecto de la fuerza *P* es separar una de otra 69.
las dos partes *ZFG*, *ZKL*; y para el equilibrio es preciso que estas dos caras contraresten el conato de dicha fuerza. Por consiguiente, si la figuramos en *P'Q*, la hemos de resolver en otras dos *P'N*, *P'M* perpendiculares á las dos caras de la cuña ó á las superficies tangentes de los dos pedazos que intenta separar; porque sino fueran perpendiculares á estas partes, estas no las podrian contrarestar. El conato de estas dos fuerzas se dirigirá á hacer dar vueltas á las dos partes del cuerpo, la primera al rededor de *V*, la otra al rededor de *X*. Las resistencias *O*, *S* en direcciones opuestas, son las fuerzas que contrarestan este movimiento de rotacion. Por consiguiente, si tiramos las perpendiculares *VY*, *XT* á *P'N* y *P'M*, podremos considerar *OVY*, *SXT* como dos palancas angulares, cuyos apoyos están en *V* y *X*.

Sentado esto, si llamamos *I* la fuerza en la direccion *P'N*, tendremos $P : I :: P'Q : P'N$; pero una vez que, segun suponemos, la fuerza *P* es perpendicular á la cabeza de la cuña, y las dos fuerzas *P'N*, *P'M* son perpendiculares á sus caras, el triángulo *P'NQ* es semejante al triángulo *ABC*, y tendremos $P'Q : P'N :: AC : AB$. Luego $P : I :: AC : AB$. Si llamamos *O* la resistencia de la parte *ZFNV*, que pasa, segun suponemos, á la distancia *VO*, sacarémos de la propiedad de la palanca $I : O :: VO : VY$ (129). Si

 mul-

Fig. multiplicamos estas dos proporciones resultará $P : O :: AC \times VO : AB \times VT$. Respecto de la otra cara sacaríamos $P : S :: AC \times XS : BC \times XT$.

Del rozamiento en la Cuña.

70. 190 Sea el triángulo isósceles ACB el perfil de una cuña cuyo destino es rajar un madero $MKHN$, aplicando en medio de su cabeza orizontal un peso P. Si llamamos x el peso que se le ha de añadir á P para vencer la resistencia que experimenta la cuña rozando en los dos lados de la raja, la figurarémos en EF que está en la direccion del peso $P+x$, y resolveremos esta fuerza en otras dos EG, EL perpendiculares á las dos caras AC, BC. Cada una de las fuerzas EG, EL es igual á $(P+x) \times \frac{AC}{AB}$, y se originan en AC y CB dos rozamientos que hemos de considerar como dos fuerzas cuyas direcciones son CA y CB; las figuraremos en CV y CX, y concluiremos el paralelogramo $VCXT$.

Sentado esto, llamemos AB, a; AC, b; y tiremos la Xt perpendicular á CO, cuya CO será $= \sqrt{(bb - \frac{1}{4}aa)}$. Si llamamos n la razon entre el rozamiento, y la presion, será CV ó $CX = \frac{n(P+x)b}{a}$, y de los triángulos semejantes XtC, COB, sacarémos $Ct = \frac{n(P+x)\sqrt{(bb-\frac{1}{4}aa)}}{a}$, luego $CT =$

$$\frac{2nP+x)\sqrt{(bb-\frac{1}{4}aa)}}{a}, \text{ ó } = 2n(P+x)\frac{CO}{AB};$$ y como esta resistencia ha de ser igual al peso x con el qual se ha de equilibrar, será $x = 2n(P+x)\frac{CO}{AB}$, de donde se saca $x = \frac{2nP \cdot CO}{AB - 2n \cdot CO}$.

PRIN-

PRINCIPIOS DE HYDRODINÁMICA.

191 TOdo quanto pertenece al equilibrio y movimiento de los fluidos es el asunto de la *Hydrodinámica*, ramo muy dilatado y no menos dificultoso de la Matemática. Compónese, pues, la Hydrodinámica de dos partes; la primera averigua las condiciones en que estriba el equilibrio de los fluidos, yá de unos con otros, yá con los sólidos que en ellos se sumergen, y se llama *Hydrostática*; la otra averigua las leyes del movimiento de los fluidos, y se llama *Hidráulica*. Acerca de la primera parte traeré lo que mas importa saber; pero acerca de la segunda seré muy breve, porque no sufren extracto los puntos que abraza. Los mas están tratados con la extension que cabe en el *Tomo V* de mi Curso, adonde podrán acudir los aficionados que desearen imponerse en los varios y dificultosísimos puntos de la Hidráulica. Fig.

192 Pero antes de engolfarnos en las investigaciones peculiares á este tratado, es preciso que demos á conocer los fluidos. Son los *fluidos* un agregado de moléculas ó partecillas muy sutiles, independientes unas de otras, y perfectamente movibles ácia qualesquiera direcciones; tales son el ayre, el agua, &c. Aunque no se puede negar que las partes de los fluidos tienen alguna adherencia unas con otras, por cuyo motivo no hay fluido perfecto; no obstante prescindiremos de esta adherencia, para que salgan menos complicadas las indagaciones que nos hemos propuesto.

193 Los fluidos son unos compresibles, como el ayre, otros son incompresibles. Los fluidos incompresibles, qual es el agua, son aquellos que ninguna

Fig. compresion puede reducir á que quepan en menor espacio que el que cogen naturalmente; por manera que una cantidad determinada de un fluido de esta especie, ocupa siempre un mismo espacio, y no admite expansion ó dilatacion.

Se han executado con diferentes miras muchísimos experimentos dexando salir por *luces* ú *orificios* de igual extension é igualmente colocados, agua que llegaba á diferentes alturas en los vasos en que estaba. La cantidad de agua que ocupaba el fondo del vaso se halló en todos los experimentos, midiéndola despues de salida, constantemente de un mismo volumen. Es constante que esto no hubiera sucedido si la compresion reduxera este fluido á menor volumen, pues quando él agua tenia encima mayor cantidad del mismo fluido, hubiera debido ocupar menos espacio, que quando era menor la expresada altura.

DE LA HIDROSTÁTICA.

194 El asunto de la *Hidrostática* es, segun deciamos poco ha, averiguar las condiciones del equilibrio de los fluidos. Consiste este equilibrio en la destruccion de las fuerzas que obran ó en las mismas partes del fluido, ó en las paredes del vaso, ó en los cuerpos sólidos que están sumergidos en los fluidos. A estos los supondremos homogéneos, esto es, que se componen en toda su mole de partes elementales semejantes, é igualmente pesadas.

195 *Quando una mole ó masa fluida está en equilibrio, sean las que fueren las fuerzas que obran en ella, una partícula qualquiera experimenta una presion igual en todas las direcciones.* Esta es la ley fundamental del equilibrio de los fluidos.

Porque, ya que todas las partículas del fluido son independientes unas de otras, y perfectamente movibles

bles ácia todas partes (192), síguese que si la partícula propuesta experimentára menos presion de un lado que de otro, se movería ácia aquel lado precisamente donde fuese menor la presion, y yá no habría mas equilibrio en el sistema, cuya consecuencia no concuerda con la hipótesi. Fig.

196 Es tambien evidente que si al reves cada partícula padece igual presion por todos lados, todo el sistema estará en equilibrio.

Del equilibrio de los fluidos incompresibles.

197 *Si á todos los elementos iguales* A, B, C, D &c. *de la superficie de una masa fluida* ADKF *sin pesantez, se aplican perpendicularmente potencias iguales* P, Q, R, S, T &c. *las quales podemos figurarnos que obran por medio de otros tantos émbolos; estas potencias están en equilibrio.* 71.

Porque los conatos de las potencias P, Q, R, S, T se comunican libremente, y del mismo modo á la masa cuyas partes son todas perfectamente movibles (192), y no hay ninguna razon para que alguna de dichas potencias pueda mas que la otra. Luego la masa fluida no puede mudar ni de figura ni de lugar, y las potencias expresadas están forzosamente en equilibrio.

198 Síguese de aquí 1.° Que si en lugar de suponer $A = B = C = D$, y $P = Q = R = S$ &c. suponemos que las potencias son proporcionales á los elementos, ó que $P : Q : R : S$ &c. :: $A : B : C : D$ &c. tambien subsistirá el equilibrio del sistema. Porque si consideramos el elemento A como la unidad de medida de los elementos de la superficie del fluido, y la potencia P como la unidad de presion en la misma superficie; y suponemos despues que cada uno de los elementos B, C, D &c. sea duplo, triplo, ó n veces múltiplo del elemento A, podremos considerar igualmen-

 te

Fig. 71. te cada una de las potencias Q, R, S &c. como compuestas de dos, tres, ó n potencias iguales á la potencia P, y aplicadas á cada una de las partes iguales de los elementos B, C, D &c. En virtud de esto, este caso viene á ser el mismo que el precedente.

199 2.º Sea m una molécula qualquiera tomándola donde se quisiere en la masa fluida. Tómese donde se tomare, es evidente, por razon de la perfecta mobilidad de las partículas fluidas, que dexa libertad á las potencias P, Q, R &c. para comunicar su accion en toda la masa que la partícula m experimenta la presion del mismo modo que si estuviera colocada inmediatamente en la superficie del fluido; y considerándola á ella misma como una masa fluida muy pequeña, se echa de ver que debe padecer una presion perpendicular é igual en todos los puntos de su superficie, á fin de que subsista en equilibrio. Luego si concebimos su superficie dividida en un número determinado de partes, que cada una sea, v. gr. al elemento A, como el número q es al elemento r; la expresion de la presion que aguanta cada una de las partes de que hablamos, será $\frac{1}{r} \times P$.

72. 200 Supongamos un licor sin pesantez encerrado por todas partes en un vaso $ABCD$. Hágasele al vaso una abertura qualquiera X, y aplíquesele una potencia P; esta fuerza se comunicará libremente en todas las direcciones á todos los puntos de la masa; y si nos figuramos los suelos y las paredes del vaso divididos en un número determinado de elementos, que tengan una razon dada con la abertura X, cada uno de ellos sentirá una presion que tendrá con la potencia P la misma razon; porque las paredes y los suelos hacen con su resistencia las veces de las potencias Q, R, S &c.

201 *La superficie de un licor entregado á la accion li-*

libre de la pesantez, y que se mantiene en equilibrio Fig.
en un vaso AMNE *donde está, es orizontal, ó perpen-* 73.
dicular á la direccion de la pesantez.

Supóngase un instante que la superficie del licor tenga la curvatura *ABDE*. Considérese una partícula qualquiera *B* de la superficie, y resuélvase su pesantez *Bf* en otras dos fuerzas *Bt*, *Bg*, cuyas direcciones sean las de los elementos contiguos *Bt*, *Bg*, de la curva. Por lo probado (77) sabemos, sobre ser evidente de suyo, que si muchas fuerzas se equilibran unas con otras, se destruyen indefectiblemente unas á otras en todas las direcciones. Así, las fuerzas *Bt*, *Bg* deben ser iguales á las fuerzas con las quales las partículas inmediatas obran en la partícula *B* en las direcciones opuestas *tB*, *gB*. Pero por lo probado (195) la partícula *B* no puede estar en equilibrio sino en quanto experimenta una presion igual en todas las direcciones. Luego las fuerzas *Bt*, *Bg* son iguales; para esto se requiere indispensablemente que al ángulo *tBg* formado por los elementos *Bt*, *Bg* de la curva le divida en dos partes iguales la direccion de la pesantez. Y como esto mismo debe verificarse en todos los puntos de la superficie del fluido; *síguese* forzosamente que esta superficie es orizontal, ó perpendicular en todos sus puntos á la direccion de la pesantez.

202 Síguese de aquí que pues la superficie *AE* 74.
del fluido del vaso *AME* forma un plano orizontal,
si nos figuramos que una porcion qualquiera *BDC*
del mismo fluido llegue á helarse ó endurecerse, sin
que pueda variar ni su posicion ni su volumen, es
evidente que subsistirá el equilibrio, y que las dos
superficies parciales *AB*, *DE* permanecerán en un
mismo plano orizontal. Luego si en un sifon, cantim-
plora ó bomba qualquiera *KMO* hubiese un licor in- 75.
mobil, cuyas dos superficies sean *AB*, *DE*, estas

Fig. dos superficies estarán forzosamente á nivel, ó en un mismo plano orizontal; porque no hay inconveniente alguno en considerar el licor del sifon como la
74. porcion *ABCDEM* del vaso.

Incluye esta ilacion una infinidad de casos. De qualquier modo qué se comuniquen uno con otro dos brazos ó dos piernas de un sifon, ó dos depósitos qualesquiera, ya sea comunicándose inmediatamente por alguna parte, ya sea por conductos de comunicacion; los licores de una misma especie contenidos en dichos dos depósitos siempre se pondrán á nivel. Esta es la razon por que el agua de los pozos que se abren en las inmediaciones de algun rio, se ponen á nivel con el rio; porque el agua cala por entre la tierra ó el cascajo, y de este modo se forman canales subterraneos de comunicacion entre el rio y los pozos.

Esta consecuencia no se verifica quando de los dos brazos del sifon el uno es mayor que el otro, si el diámetro del uno no pasa de una linea; por cuyo motivo le llaman *tubo capilar* ó parecido á un cabello.

76. 203 *Estándose quieto el licor contenido en el vaso* AMNE, *y no experimentando mas impulso que el de la pesantez, una partícula qualquiera* m *padece igualmente por todas partes una presion equivalente á una fuerza igual al peso de la columnilla* om *que le corresponde verticalmente.*

1.° La partícula *m* padece una presion igual en todas las direcciones; donde no, no estaría en equilibrio (195).

2.° La presion que experimenta es igual al peso de la columnilla *om*; porque si concebimos que la masa total del fluido, á excepcion de la columna *om*, llegue á endurecerse sin que pueda variar ni su situacion ni su volumen, la partícula *m* permanecerá en el mismo estado de compresion que antes. Pero quando solo el filete *om* se mantiene fluido, habiendo-

dose endurecido el residuo de la masa, sufre con Fig.
evidencia el peso total de dicho filete *om*. Luego la medida de la presion que padece en todos los casos, es el peso absoluto de la misma columna.

204 Luego 1.° Si nos figuramos que una curva 77.
qualquiera *FmQ* toque la partícula *m* del lado de la pared *AM*, y suponemos que la porcion *AFmQM* se endurezca de modo que no pueda variar ni su situacion ni su volumen; la partícula *m* siempre experimentará en todas las direcciones una presion del mismo modo que si la masa total se hubiese mantenido fluida. Podemos concebir igualmente, sin que dexe de subsistir el equilibrio, que tambien se endurezca la porcion qualquiera *EHSN* de licor. Luego 78.
en un vaso qualquiera *FQSH* un punto qualquiera *m* de sus paredes experimenta por parte del fluido una presion igual al peso absoluto del filetillo vertical *om* que remataría en la superficie del fluido, prolongada si fuese menester. Porque podemos considerar el licor del vaso *FQSH* como la porcion *FQSH* del licor del vaso *AMNE*, en el supuesto de haberse endu- 77.
recido ambas partes *AFmQM*, *EHSN*.

205 2.° Si llamamos *my* una parte qualquiera in- 78.
finitamente pequeña de las paredes *FQSH*; la presion perpendicular que padece esta parte sigue la razon compuesta del número de moléculas que cubren la pequeña superficie *my*, y de la altura vertical *om* que podemos considerar como una misma respecto de todos los elementos *my*. Por consiguiente si llamamos p la gravedad específica del licor, la presion de que hablamos será $p \times mo \times my$ (58).

206 *Estándose quieto el licor del vaso* ANE, *como* 79.
no experimente mas impulso que el de la pesantez, la suma de las presiones perpendiculares que padecen todos los elementos de una parte qualquiera finita fur *del suelo ó de las paredes del vaso, es igual al peso ab-*

Fig. *absoluto de una columna, cuya base fuese la superficie* fnr *(tendiéndola en plano, si fuese menester), y cuya altura fuese la distancia vertical* GO *del centro de gravedad* G *de la misma superficie* fnr *á la superficie* AE *del fluido.*

Divídase la superficie *fnr* en una infinidad de elementos *fg*, *gx*, *xy* &c. y tírense las verticales *ft*, *gu*, *xz* &c. que rematan en la superficie del fluido. Sea *p* la gravedad específica del fluido. Las presiones perpendiculares que padecen los elementos *fg*, *gx*, *xy* &c. las representan los productos $p \times fg \times ft$, $p \times gx \times gu$, $p \times xy \times xz$ &c. (205). Pero si consideramos estos productos como los momentos de otros tantos pesos pequeños, respecto de la superficie orizontal del licor, tendremos (86) $p \times fg \times ft + p \times gx \times gu + p \times xy \times xz$ &c. $= p(fg + gx + xy +$ &c. $)$ $GO = p \times fnr \times GO$. Luego &c.

207 Por consiguiente 1.° Quando el suelo *MN*
80. de un vaso, sea la que fuere su figura, es orizon-
81. tal, la expresion de la presion que este suelo padece
82. es $p \times MN \times GO$, siendo *p* la gravedad específica del fluido, *GO* la vertical levantada desde el centro de gravedad *G* del suelo *MN*, que remata en la superficie del fluido, prolongándola si fuese menester.

Luego, siempre que sean iguales los suelos de los tres vasos pintados en las figuras, y sea una misma en cada vaso la altura del licor respecto del suelo, los suelos padecerán presiones iguales. Con efec-
81. to, es evidente que si se tiran las verticales *Mm*, *Nn*,
82. y se supone que las dos porciones de licor *AMm*, *ENn* se endurezcan conservando no obstante el mismo sitio, y el mismo volumen, y que en el supuesto de estar llenos de licor los espacios *AmM*, *EnN*, se quiten las paredes *AM*, *SN*, todo permanecerá en el mismo estado que antes, y los tres suelos experimentarán igual presion.

Pue-

208 Puede, pues, suceder que la presion que padece el suelo de un vaso, y el peso total del licor que contiene sean dos cosas muy distintas. En el vaso cilíndrico la presion del fondo es igual al peso de todo el licor, pero en los otros vasos, la primera fuerza es mayor ó menor que la segunda. Fig.

209 Sea *AM* una compuerta rectangular y vertical de inclusa, que sostiene la presion de la masa de aguas detenidas *AMO*, cuya extension orizontal *MO* no importa sea la que se quiera, porque no tiene influxo alguno en la presion. Sea *G* el medio ó centro de gravedad de la compuerta, y llamemos *A* el lado orizontal del rectángulo que forma la misma compuerta. La expresion de la presion que sufre será (206) $p \times A \times AM \times GM = p \times A \times \frac{(AM)^2}{2}$, siendo p la gravedad específica del agua. 83.

Sea v. gr. $AM = 12$ pies, $A = 3$ pies, tendremos $A \times \frac{(AM)^2}{2} = 216$ pies cúbicos; y como el pie cúbico de agua dulce pesa unas 70 libras, será $p \times A \times \frac{(AM)^2}{2} = 15120$ libras.

210 Póngase sobre la superficie orizontal *AE* del licor *AMNE* abandonado á la accion de la pesantez, una tapa movible cargada en su medio con un peso *Q*, subsistirá el equilibrio. Hágase despues en qualquiera parte de las paredes del vaso una abertura *fr*, y apliquesele un émbolo para que no se salga el licor. Sentado esto, 1.° la presion del peso *Q* que se puede considerar como dividida en una infinidad de potencias que oprimen perpendicularmente la superficie *AE*, se distribuirá entre todos los puntos del fluido, de lo qual resultará en la superficie *fr* una presion cuya expresion es $\frac{fr}{AE} \times Q$ (198). 2.° En virtud de la pesantez del fluido, la superficie *fr* siente (206) una presion perpendicular igual al pe- 84.

Fig. peso de una columna del mismo fluido, cuya base
84. fuese fr, y la altura la distancia GE de su centro de gravedad al nivel del licor. Llamemos R este peso. Se echa de ver que pues la potencia aplicada al émbolo contraresta los conatos de las dos potencias $\frac{fr}{AE} \times Q$ y R, ha de ser $= \frac{fr}{AE} \times Q + R$.

85. 211 Supongamos un vaso $AMNE$ cerrado por todas partes lleno de un licor pesado ó no pesado, y cuya tapa superior AE sea orizontal. Háganse en esta tapa dos aberturas fr, gt, y aplíquense dos pesos P y Q, tales que $P : Q :: fr : gt$; estos dos pesos forman equilibrio como antes (198); porque sea ó no pesado el licor, los dos pesos P y Q obran del mismo modo en la superficie y en lo interior del fluido.

86. 212 Ahora bien, si en vez de suponer como antes dos pesos P, Q aplicados á las dos aberturas fr, gt, suponemos que estas aberturas sean las basas de dos columnas qualesquiera $fxyr$, $gzut$ de licores diferentes, y si despues de tirar por los dos centros de gravedad G y T de las dos bases fr, gt, las verticales GO, TS, llamamos p y p' las pesanteces específicas de los dos licores $fxyr$, $gzut$, se echa de ver (207) que la expresion de la presion con que el licor $fxyr$ obra en la tapa fr, es $p \times fr \times GO$, y que la expresion de la presion con que el licor $gzut$ obra en la tapa gt es $p' \times gt \times TS$. Pero si tenemos la proporcion $p \times fr \times GO : p' \times gt \times TS :: fr : gt$, las dos fuerzas propuestas formarán equilibrio (211). Luego tendremos en este caso $p \times GO = p' \times TS$, y por lo mismo $GO : TS :: p' : p$, y quiere decir que las dos columnas líquidas $fxyr$, $gzut$ que se equilibran una con otra, siguen la razon inversa de sus pesanteces específicas.

Si la columna $fxyr$, v. gr. fuere de agua, y la co-

69

70

72

73

74

75

77

78

76

columna *gzut* de mercurio, tendremos *GO* : *TS* :: Fig.
14 : 1 con corta diferencia. Sabemos que el mercurio se contrae y dilata con el frio y el calor; pero aquí prescindimos de esta propiedad, y tomamos la pesantez específica media, la que le corresponde en los tiempos templados, cuya pesantez está averiguado que tiene con la del agua la misma razon que 14 con 1.

213 *Si un licor pesado estuviere en equilibrio en un vaso flexible; tome el vaso la figura que tomare, la superficie del fluido que suponemos libre, será orizontal.*

Porque una vez que ha tomado el vaso la figura que pide el equilibrio de las fuerzas que obran en el fluido, no hay inconveniente alguno en considerar este vaso como sólido. Y como la demostracion de antes (201) queda en su fuerza, sea la que fuere la figura de esta especie de vasos, síguese &c.

214 Cuestion. *Determinar las condiciones generales que deben concurrir para que un fluido se ponga en equilibrio por su sola pesantez en un vaso flexible, pesado é inextensible.*

Sea *AMNOPB* la figura que toma el vaso, al 87.
qual considerarémos aquí como la seccion vertical de un prisma de una infinidad de lados, y cuya longitud es orizontal. Consideremos la curva como un polygono de una infinidad de lados, siendo *MN*, *NO*, *OP* tres de sus elementos iguales é inmediatos. Así que el fluido está en equilibrio, y toma el vaso una figura estable ó permanente, podemos considerar los puntos *M* y *P* como fijos; y prescindiendo del resto de la curva, podemos considerar que *MNOP* es un polygono funicular atado á los dos puntos fijos *M*, *P*, y que á dos de sus ángulos *N* y *O* están aplicadas dos fuerzas, que la una *NS* ú *Os* vertical representa el peso del elemento *MN* ú *ON*, y la otra

NR

Fig. 87. NR ú Or, que divide el ángulo MNO ú NOP en dos partes iguales, y representa la presion del fluido, cuya fuerza por ser en todas partes perpendicular al fluido, divide en dos ángulos iguales el ángulo que forman dos elementos consecutivos. Con las dos fuerzas NS, NR aplicadas al ángulo N compondremos la fuerza única NQ figurada en la diagonal NQ del paralelogramo $NSQR$; compondremos tambien con NQ y la tension VN del cordon MN; una fuerza única NT, cuya direccion es ON, y está figurada en la diagonal NT del paralelogramo $NQTV$. Lo mismo practicarémos respecto de las fuerzas aplicadas al ángulo O, reduciéndolas á la fuerza única Ot, cuya direccion es NO. Sentado esto, es evidente que no puede haber equilibrio á no ser que sean iguales las dos fuerzas NT, Ot, directamente opuestas. Todo consiste, pues, en hallar la expresion de cada una de estas dos fuerzas, é igualarlas una con otra.

Báxese desde el punto Q la perpendicular QE á NS prolongada; si llamamos 1 al seno total, sacarémos por lo dicho (I. 720) que $EQ = SQ \,.\, \text{sen}\, ESQ = NR \,.\, \text{sen}\, RNS$; $SE = NR \,.\, \cos RNS$; $NE = NS + NR \,.\, \cos RNS$; $\text{sen}\, ENQ = \frac{EQ}{NQ} = \frac{NR \,.\, \text{sen}\, RNS}{NQ}$; $\cos ENQ = \frac{NE}{NQ} = \frac{NS + NR \,.\, \cos RNS}{NQ}$; $\text{sen}\, TQN = \text{sen}(MNG + ENQ) =$ (II. 328) $\text{sen}\, MNG \times \cos ENQ + \cos MNG \times \text{sen}\, ENQ = \text{sen} \frac{\text{sen}\, MNG \,.\, (NS + NR \,.\, \cos RNS)}{NQ} + \frac{\cos MNG \,.\, NR\, \text{sen}\, RNS}{NQ}$. Ahora bien, tenemos la proporcion $NQ : TN :: \text{sen}\, MNT : \text{sen}\, TQN$, y por consiguiente $TN = \frac{NQ \,.\, \text{sen}\, TQN}{\text{sen}\, MNT}$. Substituyendo en lugar de sen TQN su valor, hallarémos $TN = \frac{\text{sen}\, MNG (NS + NR \,.\, \cos RNS)}{\text{sen}\, MNT} + \frac{\cos MNG \,.\, NR \,.\, \text{sen}\, RNS}{\text{sen}\, MNT}$. Por el mismo camino hallaríamos $OT = \frac{\text{sen}\, POI (Os + Or) . \cos rOs)}{\text{sen}\, POs} + \frac{\cos POI \,.\, Or \,.\, \text{sen}\, rOs}{\text{sen}\, POs}$. Por consiguiente la equacion en que

que están cifradas las condiciones del equilibrio será Fig.

$$\frac{\text{sen}\, MNG\,(NS + NR\,.\,\cos RNS) + \cos MNG\,.\,NR\,.\,\text{sen}\, RNS}{\text{sen}\, MNT} = \frac{\text{sen}\, POK(Os + Or\,.\,\cos rOs) + \cos POI\,.\,Or\,.\,\text{sen}\, rOs}{POt}.$$

215 Síguese de aquí que si fuese *AMNOPB* un 88.
anulo circular puesto encima de un plano orizontal, y comprimiese á dicho ánulo un fluido que obrase perpendicularmente á todos sus puntos, ó en la direccion orizontal de cada radio; las fuerzas *NS*, *Os* 87.
serían nulas en este caso, y la equacion general para el equilibrio se reduciría á $\frac{\text{sen}\, TRN\,.\,NR}{\text{sen}\, MNT} = \frac{\text{sen}\, trO\,.\,Or}{\text{sen}\, POt}$. 88.
Esto supuesto, como todas las fuerzas *NR*, *Or* son iguales, es evidente que por ser tambien iguales por hypótesi los elementos *MN*, *NO*, *OP*, la uniformidad de la curvatura de la circunferencia *AMNOPB* hará que sean iguales unas con otras las fuerzas *NT*, *Ot*; luego se equilibrarán (73). Habrá igualmente equilibrio en todos los demas puntos de la curva; luego el ánulo se quedará con la forma circular.

216 Subsistiendo siempre la misma hypótesi (215) se echa de ver que la fuerza *NT* expresa la tension del elemento *NO*, siendo así que la fuerza *NR* expresa la presion del fluido en *N*. A mas de esto, es patente que á los otros puntos de la circunferencia corresponden dos fuerzas análogas é iguales, cada una á la suya, con las dos fuerzas *NT*, *NR*. Pero por razon de los triángulos *NRT*, *ONC* que son semejantes, por ser iguales los ángulos *RNT*, *ONC*, y tambien los ángulos *NRT*, *NOC*, por quanto *CO* se puede reputar por paralela á *CN*; tenemos la proporcion *NR* : *TN* :: *NO* : *CN*. Luego si llamamos *n* el número de todas las potencias *NR* aplicadas á todos los puntos de la circunferencia, es evidente que la suma de las mismas potencias es á la tension de la circunferencia en cada uno de sus ele-

Fig. elementos, como n . *NO* es á *CN*; esto es, como la circunferencia *AMNOPB* es al radio *CN*.

89. 90. 217 Si *ABCD*, *abcd* fuesen dos cilindros flexibles rectos ó inclinados, siendo orizontales sus bases, llenos de licores de diferentes especies; las tensiones de las dos circunferencias *BMNC*, *bmnc* estarán una con otra en razon compuesta de las alturas de los licores, de sus pesanteces específicas, y de los radios *BH*, *bb* de las mismas circunferencias.

Porque sean *AB*, *ab* las alturas verticales de los dos cilindros propuestos; p y p', las gravedades específicas de los dos licores; la expresion de la suma de las presiones con las quales el fluido *ABCD* obra en todos los puntos de la circunferencia *BMNC* es $p \times AB \times BMNC$, y la expresion de la suma de las presiones con que el fluido *abcd* obra en todos los puntos de la circunferencia *bmnc* es $p' \times ab \times bmnc$ (203). Llamemos F y f las tensiones de las dos circunferencias *BMNC*, *bmnc* en cada uno de sus elementos; tendremos las dos proporciones (216).

$$p \times AB \times BMNC : F :: BMNC : BH.$$
$$p' \times ab \times bmnc : f :: bmnc : bb.$$

Pero $BMNC : BH :: bmnc : bb$; luego $F : f :: p \times AB \times BMNC : p' \times ab \times bmnc :: p \times AB \times BH : p' \times ab \times bb$.

91. 218 Sean las dos coronas ó ánulos *BSERKM*, *bserkm* los anillos elementales de que se componen los gruesos de los dos cilindros de que acabamos de hablar. Figurémonos que dichas coronas tambien se componen de una infinidad de filetes figurados en las circunferencias *XYVZ*, *xyuz*; es evidente que las resistencias que los dos tubos cilíndricos oponen á su rompimiento en la direccion de sus gruesos *BS*, *bs*, están en razon compuesta del número de filetes que forman los anillos elementales, y de la tenacidad de las materias de que son. Luego si llamamos R, r las dos resistencias expresadas; E y e, los gruesos *BS*, *bs*;

T

T y t, las tenacidades de las materias de que se com- Fig.
ponen los tubos; tendremos $R : r :: ET : et$. Pero para 91.
que se verifique el equilibrio es forzoso que las fuer- 92.
zas R y r sean iguales respectivamente á las fuerzas F y f de que se habló antes (217). Luego si llamamos H y h las alturas de los licores en los dos cilindros; D y d, los diámetros de las basas de los mismos cilindros, tendremos $ET : et :: \frac{pDH}{2} : \frac{p'dh}{2}$; luego $E : e :: \frac{pDH}{T} : \frac{p'dh}{t}$; esto quiere decir que *los gruesos de los dos cilindros están en razon compuesta de la directa de las pesanteces específicas de los licores, de sus alturas, de los diámetros de los cilindros, y de la inversa de las tenacidades de las materias de que se componen los tubos.*

Quando los licores y las materias de que se componen los tubos son de una misma especie, puede simplificarse esta proporcion, y reducirse á $E : e :: HD : hd$.

219 Infiérese de esta teórica que quando se conocen las tenacidades de las diferentes materias de que se pueden hacer tubos, y se conoce ademas de esto, por medio de un experimento inmediato, el grueso que se le debe dar á un tubo determinado para que aguante el peso de un fluido dado, averiguarémos solo con hacer una proporcion, el grueso de otro tubo qualquiera, con tal que sean dadas sus dimensiones. Entre muchos medios que hay para experimentar la tenacidad de una materia propuesta, el mas sencillo consiste en determinar el peso que se necesita para romper un filete ó hebra de dicha materia de grueso determinado.

Propongámonos *determinar v. gr. el grueso que se le debe dar á un tubo de plomo de 6 pulgadas de diámetro, el qual ha de aguantar el empujo de una columna de agua de 100 pies de alto.*

Fig. 91. 92. Es evidente que podemos considerar el grueso del tubo como compuesto de una infinidad de filetes flexibles. Pero consta por los experimentos de Parent, individuo de la Real Academia de las Ciencias de París, que un tubo de plomo de 12 pulgadas de diámetro, y de 60 pies de altura, ha de tener 6 lineas de grueso para sostener verticalmente sin reventarse el empujo del agua. Tendremos, pues (218), llamando x el grueso que se busca $60 \times 12 : 100 \times 6 :: 6$ lin. : $x = 5$ lin.

Determinemos el grueso que se le debe dar á un tubo de cobre de 4 pulgadas de diámetro, para que aguante el empujo de una columna de mercurio de 30 pies de altura.

La tenacidad del plomo es á la del cobre como 1 es á 28, con corta diferencia; y la pesantez específica del agua es á la del mercurio, como 1 es á 14, ó allá se vá. Así, admitiendo como antes los experimentos de Parent, y llamando x el grueso que buscamos, tendremos (218) $\frac{1 \times 12 \times 60}{1} : \frac{14 \times 4 \times 30}{28} ::$ 6 lin. : $x = 3$ lineas.

Del Equilibrio del ayre.

220 Como el ayre es el mas conocido de los fluidos elásticos, el que mas espacio coge, el mas útil para nosotros, es acreedor á que nos detengamos en considerar sus propiedades con alguna individualidad. Para tratar este asunto con rigor geométrico, sería indispensable conocer la figura de las moléculas aereas, y la ley precisa con que se encogen ó dilatan, por razon del frio, del calor, y de otras causas físicas; pero lo que se sabe acerca de estos puntos es muy poco é imperfecto. No hay, pues, que esperar en esta materia una teórica matemática y rigurosa. No obstante, no seguiremos hi-

hipótesi ninguna, y quanto dixéremos estará fundado en la experiencia. Fig.

221 *El ayre es un fluido pesado.*

La pesantez es una fuerza universal que abraza toda la naturaleza; no hay cuerpo alguno libre de su impulso. Sin embargo, los Antiguos no conocieron la pesantez del ayre; *Galileo* tuvo de ella algunas sospechas á principios del siglo pasado; pero su discípulo *Torricelli* la demostró en el año 1643. Cogió un tubo de vidrio *AB*, de unos 3 pies de largo, abierto en el extremo *A*, y tapado exâctamente en el extremo *B*, le volvió boca arriba para llenarle de azogue ó mercurio, procurando quanto pudo no entrase, ni quedase en él ayre; tapó despues el extremo *A* con el dedo, puso el tubo en una situacion vertical, volviendo ácia arriba el extremo *B*; metió el extremo *A* en un vaso *MCDN* donde habia azogue, y quitando el dedo, dexó el mercurio que habia en el tubo entregado al impulso de su pesantez. Entonces la columna *AE* de mercurio que habia en el tubo se mantuvo unas 28 pulgadas mas alta que el nivel *MN* del mercurio del vaso *MCDN*. De aquí infirió Torricelli con mucha razon, que la columna de mercurio se mantiene elevada dentro del tubo, en virtud de la presion con que el ayre exterior obra en la superficie del mercurio del vaso *MCDN*, cuya presion no experimenta la columna contenida en el tubo, por estar sellado herméticamente su extremo superior. Con efecto, si se hace una abertura en el extremo superior del tubo por donde se le pueda introducir el ayre, la columna de mercurio se cae al instante, y se vierte en el vaso. 93.

222 Síguese de esta proposicion, 1.° que por ser pesado el ayre, y su presion en cada punto de la superficie de la tierra equivalente al peso de una columnilla de mercurio, cuya altura media suponemos

 que

Fig. que se conozca, es facil de averiguar todo el peso
93. de la masa del ayre que circunda el globo terrestre; porque sea R el radio del globo terrestre; r, la altura dada de la expresada columnilla de mercurio; P, la razon entre el diámetro y la circunferencia; p, la gravedad específica del mercurio. Se buscarán las solideces de dos esferas tales, que el radio de la una sea $R+r$, y el radio de la otra R; se restará el segundo sólido del primero, y saldrá la resta $\frac{4P(R+r)^3}{3} - \frac{4PR^3}{3}$ ó $4P\left(R^2r+r^2R+\frac{r^3}{3}\right)$. Se multiplicará esta resta por p, y considerando que los términos donde están r^2 y r^3 se pueden omitir (II. 517) sin recelo de error substancial, será $4pPR^2r$ la expresion general y muy aproximada del peso que se busca.

Sea v. gr. $r = 28$ pulgadas; 960 libras el peso de un pie cúbico de mercurio. Supongamos que un grado de círculo máximo de la tierra coge 56979 ó 57000 toesas. Se sacará, despues de executar todos los cálculos indicados en la fórmula antecedente, que el peso total de la atmósfera es de 11028854877090909091 libras, ó allá se vá.

223 2.° Quando dos columnas, la una de mercurio y la otra de agua, se equilibran, sus alturas son recíprocamente proporcionales á sus gravedades específicas (212); por manera que si la altura de la columna de azogue es de 28 pulgadas, la de la columna de agua deberá ser de unos 32 pies. Y como la presion de la atmósfera contraresta la primera de estas dos columnas, conforme acabamos de manifestar, tambien contrarestará la segunda. Por consiguiente en el vacuo la presion de la atmósfera debe sostener una columna de agua de unos 32 pies de alto.

94. La experiencia confirma esta ilacion. Sea HQ un tubo ó cuerpo de bomba vertical, cuyo extremo Q, abierto, está metido en el agua. Córrase de abaxo

ar-

arriba á lo largo del tubo un émbolo *KO* que llene Fig.
exâctamente todo su hueco; el agua subirá por el tu- 94.
bo hasta la altura de unos 32 pies mas arriba del nivel *MN*; y no pasará de allí, aunque se suba mas arriba el émbolo. La razon de esto es muy patente. Quando el émbolo sube, dexa debaxo de sí un vacío, en el qual el ayre exterior no se puede introducir, y la presion libre de este ayre en la superficie *MN* del depósito impele el agua, obligándola á introducirse por la abertura *Q*, y subirse por el tubo. El agua no sube mas arriba de los 32 pies, porque entonces su peso está en equilibrio con la presion de la atmósfera.

224 Sea *ABO* un sifon, la bomba ó cantimplora, 95.
que sirve para sacar licores de los vasos donde los hay. Compónese este instrumento de dos piernas ó brazos desiguales *AB*, *BO*. La mas corta *AB* se mete dentro de la cuba, tinaja, &c. ó, en general, de la vasija *MCDN* donde está el licor; y echando con chupar, ó de otro modo el ayre que hay dentro del sifon, sube el licor tubo arriba, y sale por el orificio *O* hasta vaciarse la vasija, con tal que el punto *O* esté mas baxo que el suelo del vaso.

Esto es muy facil de explicar. Figurémonos que el extremo *O* del tubo está metido dentro de un vaso *EF* donde está el licor. Se echa de ver que cada una de las partes *AB*, *BO* de la bomba puede considerarse como un tubo particular, parecido al de Torricelli. Por consiguiente, si representa *KX* la presion de la atmósfera; *KV*, el peso de la columna fluida *AB*; *KZ*, el peso de la columna *BO*; es evidente que *VX* representará la fuerza que levanta el fluido dentro del tubo *AB*, y que *XZ* representa la fuerza que impele el fluido para que suba por el tubo *OB*. Pero como estas dos fuerzas son contrarias, la menor queda destruida, y *ZV* es la fuerza residua que causa la evacuacion en la direccion *ABO*.

Fig. 95. Síguese de aquí 1.º que si $KV = KZ$, no saldrá el licor. 2.º que si el peso de la pierna mas corta fuese mayor que el de la atmósfera, tampoco saldrá el licor, porque entonces no tendrá la presion de la atmósfera bastante fuerza para levantar el licor hasta *B*. Así, v. gr. si el licor fuese agua, será preciso que la altura de la pierna mas corta *AB* no llegue á 32 pies; si fuere azogue, *AB* no deberá llegar á 28 pulgadas, &c.

225 *El ayre es un fluido elástico.*

Llénese de ayre una vegiga hasta que se hinche; resultará una pelota que se comprime quando se la aprieta, y se dilata en cesando la compresion.

226 *La fuerza del ayre comprimido es igual á la fuerza que causó la compresion.*

Esto es una consecuencia inmediata de lo dicho (7).

227 *El ayre se comprime á sí mismo con su propio peso.*

Porque, como el ayre es un fluido pesado, si nos figuramos la atmósfera dividida en una infinidad de rebanadas, ó, lo que mas hace al caso, de camas perpendiculares á la accion de la pesantez, es patente que las camas inferiores aguantarán el peso de las superiores; de lo qual se origina una presion que será tanto mayor, siendo todo lo demas igual, quanto mas abaxo estuviere en la atmósfera la cama comprimida.

Hemos dicho *siendo todo lo demas igual*, porque otras causas, el frio y el calor v. gr. contribuyen para comprimir ó dilatar el ayre. Es sumamente variable la densidad de este fluido, y viene á ser ochocientas ó novecientas veces menor que la del agua. La razon media entre estas dos densidades puede suponerse en nuestros climas igual á la fraccion $\frac{1}{850}$.

228 *Si se comprime una misma masa ó cantidad*

de

de ayre, y se la reduce á que ocupe diferentes espacios ó volúmenes; estos volúmenes estarán unos con otros en razon inversa de las fuerzas comprimentes. Fig.

Pruébase con el experimento siguiente. Es *ABC* 96. un tubo de vidrio recurvo sellado herméticamente en su extremo *C*, y abierto en el extremo *A*. Sus dos piernas *DA*, *EC* son verticales; pero el tubo *DE* que une la una con la otra es orizontal. Se le dán por lo regular tres ó quatro lineas de diámetro interior á este tubo. La pierna corta *EC* ha de ser perfectamente cilíndrica para que puedan compararse unos con otros los diferentes volúmenes del ayre que en ella se condensan. Suponemos que tenga 12 pulgadas de alto; la otra *DA* es mucho mas alta. Echese poco á poco en el tubo un poco de azogue para llenar el tubo orizontal, y procúrese que las dos superficies *DV*, *IE* de este fluido en ambas piernas verticales estén á nivel, á fin de que el ayre encerrado en el espacio *EC* esté en el mismo estado que el ayre exterior; porque se viene á los ojos que si el resorte del ayre interior estuviera mas ó menos contrahido que el del ayre exterior, las superficies *IE*, *DV* padecerian presiones desiguales, y no podrian por lo mismo ponerse á nivel. Prosígase echando mercurio en la otra pierna *DA*, y se reparará que á medida que sube á *H*, la superficie *EI* sube á *F*. En el supuesto de que la presion de la atmósfera equivalga al peso de una columna de mercurio de 28 pulgadas de alto, se hallará, que si despues de tirada la orizontal *FG*, la altura $GH = 14$ pulgadas, la altura *FC* del espacio que el ayre ocupare, será $= 8$ pulgadas; si $GH = 28$ pulgadas, $FC = 6$ pulgadas &c. Pero de aquí se sigue que los diferentes volúmenes de ayre encerrado al principio en *EC* siguen la razon inversa de los pesos comprimentes; porque en el primer instante quando dicho ayre no padece mas que la

Fig. 96. presion de la atmósfera, se le puede considerar como que sostiene el peso de una columna de mercurio, que coge 28 pulgadas de alto; quando se echa despues en la pierna *DA* mercurio hasta la altura de 14 pulgadas mas arriba de la linea de nivel *FG*, la presion que experimenta la masa expresada de ayre, es igual al peso de una columna de mercurio cuya altura es de 28 pulgadas + 14 pulgadas, esto es, de 42 pulgadas: quando la altura del mercurio en la pierna *DA* mas arriba de *FG*, = 28 pulgadas, la presion de la misma masa de ayre es igual al peso de una columna de mercurio, cuya altura es de 28 pulgadas + 14 pulgadas + 14 pulgadas ó 56 pulgadas &c. De donde se sigue que si los números 28, 42, 56 representan los pesos comprimentes, los números 12, 8, 6 expresarán los volúmenes de la masa de ayre. Pero tenemos estas diferentes proporciones 12 : 8 :: 42 : 28; 12 : 6 :: 56 : 28; 8 : 6 :: 56 : 42. Luego los volúmenes siguen la razon inversa de los pesos comprimentes.

Todos estos experimentos deben hacerse de modo que el ayre encerrado en *FC* sea del mismo temple que el ayre exterior, y que por consiguiente su volumen no parezca mas variacion que la que pueden ocasionar los pesos comprimentes. Sin esta precaucion, cómo el calor y el frio no obran igualmente en los dos ayres, no serán los mismos los resultados, y sería dificultoso hallar un método seguro, y no hypotético, por el qual se pudiesen distinguir sus efectos de los que causan los pesos comprimentes.

229 Por consiguiente, siendo una misma la masa, las densidades están en razon inversa de los volúmenes (35). Luego las densidades de una misma masa de ayre comprimida de diferentes pesos, son directamente proporcionales á los mismos pesos; ó (226) á las fuerzas elásticas que tienen en estos diferentes casos.

Una

230 Una vez que el ayre se comprime á sí misma con su propia gravedad (227), síguese que si una columna vertical de la atmósfera fuese de un mismo temple en toda su altura, las densidades de sus diferentes puntos formarán una progresion geométrica; porque si nos figuramos que dicha columna se compone de una infinidad de rebanadas orizontales de igual masa, la densidad de cada una de estas rebanadas será proporcional al peso que sostiene (229). Pero este peso es cabalmente la suma de los pesos de las rebanadas superiores; luego la densidad de cada rebanada es proporcional á la suma de las rebanadas superiores. Por consiguiente, las densidades de las diferentes rebanadas, considerándolas de arriba abaxo, componen una serie de tal naturaleza, que dos términos consecutivos tienen uno con otro la misma razon que las sumas de los términos que les preceden respectivamente. Luego la expresada serie es una progresion geométrica (I.245). Fig.

231 De todos los experimentos que se han hecho acerca de la compresibilidad del ayre, resulta que una misma masa de este fluido se comprime en la proporcion de los pesos que sostiene; pero hemos de prevenir que esto debe entenderse de las condensaciones medias; porque parece que en los casos extremos no puede salir verdadera la regla. Con efecto, figurémonos primero, que la presion crece al infinito; sería preciso que la condensacion creciera otro tanto; y que por último el ayre no ocupase mas que un espacio infinitamente pequeño. Pero déselas á las moléculas aereas la figura que se quisiere, es patente que quando sus resortes estuvieren contrahidos hasta que todas sus partes se toquen, la impenetrabilidad mutua de las mismas partes no dará mas lugar á ninguna compresion. Añádase á esto que con el ayre pueden estar mezcladas partes duras faltas de resor-

te,

Fig. te, ó dotadas de un resorte muy imperfecto. Por el contrario, si suponemos que la compresion mengua al infinito, no por esto se podrá suponer que el ayre se dilata al infinito; porque el resorte perfecto ó imperfecto de las moléculas aereas no puede menos de tener una expansion determinada, y no alcanza la imaginacion como una masa finita pueda llegar á ocupar un espacio infinito. Luego no se verifica, hablando con rigor, que las condensaciones del ayre sigan generalmente la razon de los pesos comprimentes. Pero como las fuerzas de que nosotros nos podemos valer, están ceñidas dentro de determinados límites, se puede mirar como verdadera, sin restriccion alguna, la proposicion sentada (228).

Del Equilibrio de los fluidos con los cuerpos sólidos sumergidos.

232 La superficie de un cuerpo sólido sumergido en un fluido está oprimida perpendicularmente á todos sus puntos por el fluido ambiente, del mismo modo y por las mismas razones que están oprimidos el suelo y las paredes de un vaso por el licor que contiene. De todas estas presiones resulta una fuerza que empuja ácia arriba el cuerpo, cuya fuerza solo puede contrarestarla la pesantez del mismo cuerpo, ó alguna causa exterior, ó finalmente la pesantez combinada con una causa exterior. Veamos como se forma este equilibrio.

233 *Quando un cuerpo sólido está metido dentro de un fluido. 1.° la fuerza con que el fluido intenta levantarle en alto verticalmente, es igual al peso del volumen fluido cuyo lugar ocupa el sólido. 2.° la direccion vertical de dicha fuerza pasa por el centro de gravedad del volumen fluido echado de su lugar, ó, lo que viene á ser lo mismo, por el centro de grave-*

vedad de la parte del cuerpo sumergida en el fluido, y considerada como homogenea. Fig.

Figurémonos desde luego la parte del cuerpo sumergida en el fluido dividida en una infinidad de rebanadas por planos orizontales. Figurémonos despues la superficie convexâ de cada una de estas rebanadas dividida en una infinidad de trapecios por planos verticales, y al mismo tiempo perpendiculares á los mismos trapecios. Es facil figurarse la posicion de estos planos, considerando que en cada punto de la superficie convexâ de una rebanada se puede levantar una linea vertical y una linea perpendicular en el mismo punto á la superficie convexâ de la rebanada; el plano que pasare por estas dos lineas, será á un tiempo vertical y perpendicular á la superficie convexâ de la rebanada.

Sea *MNYZ* la base inferior y orizontal de una 97.
de las rebanadas de que acabamos de hablar; *Ma*, la base de uno de los trapecios elementales que componen la superficie convexâ de la misma rebanada. Llamaremos *X* este trapecio. Por el punto *M* levántese el plano *AMDB* vertical y perpendicular al mismo tiempo al trapecio *X*; de lo qual resulta que este mismo plano *AMDB* corta el plano orizontal *MNYZ*, en la direccion de una recta *MT* perpen- 98.
dicular al elemento *Ma*. Hágase que por el punto *m* infinitamente próximo á *M* pase el plano orizontal *my*, que representa la base superior de la rebanada propuesta. Desde el punto *M* levántese la vertical *MP*, hasta la superficie *AB* del fluido.

Sentado esto, es evidente por los principios arriba sentados, que todos los puntos de la superficie metida en el licor están perpendicularmente oprimidos con fuerzas proporcionales á sus distancias al nivel *AB* del mismo licor. Así, tomando por unidad la densidad ó pesantez específica del fluido, el tra-

Fig. trapecio *X* cuya base es *Ma*, y la altura *Mm*, pade-
97. ce una presion perpendicular, cuya expresion es *Ma*
98. $\times Mm \times MP$. Figuremos esta fuerza en la *MF* perpendicular á *Mm*, y resolvámosla en otras dos fuerzas *ME*, *MG*, la una orizontal, y la otra vertical. Los dos triángulos semejantes *MHm*, *MEF* dán estas dos proporciones $Mm : MH :: MF : ME$, y $Mm : Hm :: MF : EF$ ó *MG*. Luego $ME = MF \times \frac{MH}{Mm} = Ma \times Mm \times MP \times \frac{MH}{Mm} = Ma \times MP \times MH$, y $MG = MF \times \frac{Hm}{Mm} = Ma \times Mm \times MP \times \frac{Hm}{Mm} = Ma \times MP \times Hm$. Pero la expresion $Ma \times MP \times MH$ significa, segun se echa de ver, que á todos los puntos del elemento *Ma* están aplicadas perpendicularmente potencias iguales, que cada una tiene por expresion el producto constante $MP \times MH$. Lo mismo diremos de todos los elementos de la curva *MNYZ*. Cada uno de sus puntos experimenta la presion perpendicular y orizontal de una fuerza cuya expresion es el mismo producto $MP \times MH$. Luego se destruyen todas estas presiones. Por consiguiente, de las dos fuerzas en que se ha resuelto la fuerza *MF*, no queda mas que la fuerza vertical *MG* ó $Ma \times Hm \times MP$. Pero es evidente que la suma de todos los productos de esta última clase compone el volumen del fluido, cuyo lugar ocupa el cuerpo. Luego

1.° La suma ó la derivada vertical de las fuerzas con que el fluido procura levantar en alto el cuerpo, es igual á la suma de los pesos menores que componen el peso total del fluido que dicho cuerpo ha echado de su lugar.

2.° Las direcciones de estas dos fuerzas están en una misma linea vertical; porque las direcciones de sus fuerzas elementales correspondientes están en una misma linea vertical. Así, la fuerza vertical con que

82

83

87

86

88

94

95

96

qué el fluido intenta levantar el cuerpo ácia arriba, Fig.
pasa por el centro de gravedad del volumen del 97.
fluido echado de su lugar, ó por el centro de gra- 98.
vedad de la parte del cuerpo sumergida en el fluido, y considerada como homogenea.

234 De aquí se infiere I.° que si un cuerpo entregado á la accion de la pesantez, y fluctuante sobre un fluido, está en una inmobilidad absoluta, siempre se verificarán estas dos condiciones á un tiempo. 1.° el peso del cuerpo es igual al peso del volumen del fluido echado de su lugar. 2.° el centro de gravedad del cuerpo, y el de su parte sumergida, considerándola como homogenea, están en una misma linea vertical. Porque para el equilibrio es menester. 1.° que el peso del cuerpo sea igual al conato del fluido que intenta levantarle verticalmente. 2.° es preciso que sean directamente opuestas estas dos fuerzas.

Quando no se verifican estas dos condiciones á un tiempo, el cuerpo oscila ó bambolea, y no llega al estado de equilibrio hasta que despues de aniquilados todos sus movimientos por la resistencia del ayre y del agua, ú otras causas, encuentra y guarda finalmente una situacion tal que se destruyen mutuamente el peso y el impulso vertical del fluido.

En las consecuencias que siguen suponemos que el centro de gravedad del cuerpo sólido, y el de su parte sumergida en el fluido están en una misma linea vertical.

235 II.° Si llamamos M el volumen total del cuerpo que fluctúa; N, la parte sumergida en el fluido, y considerada siempre como homogenea; p, su pesantez específica; p', la del fluido; es evidente que $p \times M$ es la expresion (58) del peso absoluto del cuerpo propuesto, y $p' \times N$ es la del peso del fluido echado de su lugar. Así, la condicion de equili-

Fig. librio que se ha de verificar aquí, dá la equacion $p \times M = p' \times N$. De donde resulta

1.° Que si la pesantez específica del fluido fuere mayor que la de dicho cuerpo, este nadará; porque tendremos $N < M$.

2.° Que si fuere una misma la gravedad específica del cuerpo con la del fluido, el cuerpo se sumergirá enteramente en el fluido, y por otra parte se mantendrá en él indistintamente á la profundidad que se quisiere, porque en este caso debe salir $M = N$.

3.° Que quando la gravedad específica del cuerpo fuere mayor que la del fluido, no podrá el cuerpo quedarse como en el ayre dentro del fluido sin el auxílio de una potencia que le sostenga; porque entonces $p \times M > p' \times N$. De donde se sigue que el cuerpo abandonado á sí mismo, deberá sumergirse enteramente, y baxar hasta el suelo del vaso, prescindiendo de toda resistencia.

236 III.° Supongamos que el cuerpo nade desahogado, ó que su pesantez específica sea menor que la del fluido. De la equacion $p \times M = p' \times N$ se saca la proporcion $p : p' :: N : M$, y quiere decir que *la pesantez específica del cuerpo es á la del fluido, como el volumen de la parte del cuerpo metida en el fluido es al volumen total del mismo cuerpo.* Con tres términos que se conozcan de esta proporcion, se podrá determinar el quarto que no fuere conocido.

237 IV.° La misma equacion $p \times M = p' \times N$ está diciendo que basta conocer el peso absoluto de un cuerpo fluctuante sobre un fluido, y la gravedad específica de este, para hallar el volumen de la parte sumergida en el fluido.

Supongamos v. gr. que pese 20 libras dicho cuerpo, que esté metido en el agua, y que el pie cúbico de agua pese 70 libras. Tendremos en virtud del supuesto $P \times M = 20$ libras, y por consiguiente tambien

bien $p' \times N = 20$ libras. Solo nos falta hallar el volumen de un cuerpo de agua que pese 20 libras, y para conseguirlo haremos esta proporcion 70 libras : 1 pie cúbico ó 1728 pulgadas cúbicas :: 20 libras : $N = 493\frac{5}{7}$ pulgadas cúbicas. Fig.

238 V.° Si añadimos ó quitamos una cantidad n al volumen N que el cuerpo fluctuante tiene sumergido en el fluido, será menester, para que subsista el equilibrio, añadir ó quitar un peso q al peso absoluto $p \times M$ del mismo cuerpo, de modo que salga $p \times M \pm q = p' \times N \pm p' \times n$, ó sino $q = p' \times n$. Es, pues, el peso añadido ó quitado q siempre igual al peso del volumen n del fluido que el cuerpo echa de su lugar de mas ó de menos que en su primer estado.

239 VI.° Esta tendencia ó propension que tienen los fluidos á levantar los cuerpos fluctuantes, se está aprovechando todos los dias para sacar del fondo de un rio ó de la mar fardos muy pesados. Para esto sirve un batel de mucho volumen, cargándole hasta que se sumerja muy adentro. Despues se le quita en parte ó todo el peso que le obligó á sumergirse; entonces en virtud del impulso vertical del fluido, vá subiendo, y sube con él el peso á que está atado, con una fuerza igual en el primer instante á la suma de los pesos que se le han quitado.

240 VII.° Una vez que un cuerpo sólido de una gravedad específica mayor que la del fluido en que está metido, se sumerge enteramente, y no puede estarse suspenso sin el auxilio de una fuerza exterior (235. 3.°); es evidente que si llamamos M su volumen total; p, su gravedad específica; p', la del fluido; Q, el peso que se le debe aplicar al uno de los brazos iguales de unas balanzas que sostienen con el otro brazo el cuerpo propuesto, metido enteramente en el fluido; es evidente, digo, que siendo $p \times M - p' \times M$ el peso que le queda al cuerpo en

Fig. en el fluido, debe resultar para que haya equilibrio, $Q = p \times M - p' \times M$, ó $p \times M - Q = p' \times M$, ó $p(p \times M - Q) = p \times p' \times M$; luego $p : p' :: p \times M : p \times M - Q$, y quiere decir que *la pesantez específica del cuerpo es á la del fluido, como el peso absoluto del mismo cuerpo es á la parte que pierde de su peso en el fluido.* Por consiguiente, en conociendo la pesantez específica del cuerpo, su peso absoluto, el peso que pierde en el fluido donde está enteramente metido, conoceremos la pesantez específica de dicho fluido.

241 VIII.° Métase el cuerpo sólido de que hablamos poco ha en otro fluido mas ligero específicamente todavía que el primero, y cuya pesantez específica sea p'', y el contrapeso Q sea ahora Q'. Tendremos estas dos equaciones $Q = p \times M - p' \times M$, $Q' = p \times M - p'' \times M$, que dán, la primera $p \times M - Q = p' \times M$; la segunda, $p \times M - Q' = p'' \times M$; y multiplicando la primera de estas por p'' y la segunda por p', sacarémos $p''(p \times M - Q) = p' \times M \times p''$ y $p'(p \times M - Q') = p'' \times M \times p'$, de donde sale $p'(p \times M - Q') = p''(p \times M - Q)$; por consiguiente $p' : p'' :: p \times M - Q : p \times M - Q'$; y quiere decir que *las pesanteces específicas de los dos fluidos son una con otra como las porciones que pierde de su peso en dichos fluidos un mismo cuerpo sólido de mayor gravedad específica que cada uno de ellos.*

242 IX.° Qualquiera de las dos equaciones fundamentales de los dos últimos párrafos; v. gr. la equacion $Q = p \times M - p' \times M$ puede servir para hallar el volumen M de un cuerpo sólido que se sumerge enteramente en un fluido, quando es dada la pesantez específica del mismo fluido. Porque como $p' \times M = p \times M - Q$, es evidente que si del peso absoluto $p \times M$ del cuerpo restamos el peso Q que tiene en el fluido, la resta $p' \times M$ será el peso del volumen de fluido que echa de su lugar. Pero siendo dada la pesan-

santez específica del fluido, se puede determinar con Fig.
mucha facilidad dicho volumen que es el mismo que
el del cuerpo. Esto se parece á lo dicho (237). Sígase de aquí que si el cuerpo propuesto fuese homogéneo, y no tuviese huecos interiores, se conocerá su pesantez específica, pues suponemos conocido su peso absoluto, y se puede determinar su volumen.

243 X.° Métanse en un mismo fluido dos cuerpos sólidos de mayor gravedad específica que él. Llamemos M y M' sus volúmenes; p y p' sus gravedades específicas; Q, Q' sus contrapesos, esto es, las fuerzas que se necesitan para mantenerlos en equilibrio dentro del fluido; p'', la pesantez específica del mismo fluido. Tendremos las equaciones $Q = p \times M - p'' \times M$, $Q' = p' \times M' - p'' \times M'$. Luego si suponemos que los dos cuerpos pierden partes iguales de sus pesos en el fluido, ó que sea $p \times M - Q = p' \times M' - Q'$, tendremos tambien $p'' \times M = p'' \times M'$ ó $M = M'$. De donde resulta que los cuerpos que pierden partes iguales de sus pesos en un mismo fluido, tienen volúmenes iguales.

244 XI.° En esto se funda la resolucion de la qüestion que *Hieron* Rey de Siracusa propuso á *Arquimedes*.

El caso fué, que habiendo mandado Hieron á un platero que le hiciese una corona de oro puro, y maliciando el Rey que tuviese alguna mezcla de plata, le preguntó á Arquimedes como podria salir de esta duda, sin echar á perder la corona. No se sabe á punto fixo de que medio se valió Arquimedes para responder, pero todas las señas son de que apelaría al método siguiente.

Ya que tienen volúmenes iguales los cuerpos que pierden partes iguales de sus pesos en un mismo fluido (243), es evidente que si cogemos una barra de oro, tal que el exceso de su peso en el ayre ó en el vacuo respecto de su peso en el agua, sea igual al ex-

Fig. ceso del peso de la corona en el vacío respecto de su peso en el agua, serán de volúmenes iguales la barra y la corona. Del mismo modo se determinará una barra de plata del mismo volumen que la corona.

Sentado esto, si se halla que la corona de oro pesa menos en el vacío que la barra de oro, y mas que la barra de plata, y si por otra parte se tiene certeza de que la corona solo se compone de oro y plata, se inferirá que ni es de oro ni de plata pura, sino un mixto de ambos metales; y se averiguará qué porcion de cada metal hay en la mezcla, practicando una regla de aligacion del modo siguiente. Del peso de la barra de oro se restará el peso de la barra de plata; la resta será el comun denominador de dos fracciones, que la una tendrá por numerador el exceso que el peso de la barra de oro lleva al peso de la corona; el numerador de la otra será el exceso que el peso de la corona lleva al peso de la barra de plata. La primera fraccion expresa la cantidad de oro, y la segunda la cantidad de plata que hay en la corona.

Por los mismos principios se resolvería la cuestion si se hubiese hecho la corona con otros dos metales de especie conocida. Pero sería insuficiente este método si no supiéramos de qué especie son los metales; v. gr. si no supiéramos en el caso propuesto que en la corona no hay mas que oro y plata; porque se viene á los ojos que con oro y otro metal, tal como el cobre, se puede hacer un mixto del mismo peso y volumen que un mixto compuesto de oro y plata.

245 XII.° Sin embargo de que los medios propuestos (240 y 241) son los mas exáctos que se conocen para averiguar las pesanteces específicas de los fluidos, no por eso son los únicos que sirven. En el comercio sirve regularmente para el mismo fin un ins-

instrumento muy acomodado llamado *areómetro* ó *pesalicores*. Aunque la forma de un areómetro es arbitraria hasta cierto punto; sin embargo debe ser tal, que divida con facilidad el fluido sumergiéndose mas ó menos, y se mantenga en situacion vertical, cuyas circunstancias concurren en el de *Farenheit*. Compónese de un tubo largo cilíndrico *CD*, y de las dos bolas huecas *A* y *B*; en la bola *B* que es la menor y está mas abaxo, se echa mercurio ó otra materia pesada que sirve de lastre al instrumento, y le dá estabilidad; la otra *A* que siempre está sumergida, levanta el centro de gravedad de la parte del areómetro metida en el fluido, y con esto es todavía mayor su estabilidad. Puede servir este instrumento para averiguar las pesanteces específicas de los fluidos, ó metiéndole siempre á una misma profundidad con añadirle ó quitarle pesos, ó conservándole el mismo peso, y dexándole que se meta por sí á diferentes profundidades. Consideremos ambos casos. Fig. 99.

I. Supongamos que se meta el areómetro hasta el punto *M* en dos fluidos diferentes. Sean P y $P \pm q$ los pesos absolutos que debe tener para este efecto; p y p' las pesanteces específicas de los dos fluidos; G, el volumen de la parte constante *MABN* del areómetro. Tendremos (235) $P = p \times G$, $P \pm q = p' \times G$. Luego $p' = \frac{p(P \pm q)}{P}$, así, en conociendo P y p, y el peso añadido ó quitado q, conoceremos p'.

II. Si se quiere que el areómetro tenga siempre un mismo peso, se meterá á diferentes profundidades en dos fluidos distintos. Sean K, M los puntos hasta donde se sumerge, y llamemos P su peso absoluto; H y G, los volúmenes *KABH*, y *MABN* que sumerge en ambos fluidos; p y p' las pesanteces específicas de estos fluidos. Tendremos (235)

Fig. $P = p \times H$, $P = p' \times G$. Luego $p' = \frac{p \times H}{G}$. Luego en conociendo p, H, G, conoceremos p'.

Quando el areómetro es de figura regular y conocida, es muy facil valuar por los métodos declarados en los principios de Geometría, los volúmenes H, G. Pero comunmente no se pueden usar con exâctitud estos métodos por razon de la forma del instrumento. Entonces se puede graduar el areómetro por otro medio, fundado en lo dicho (237), cuya práctica es muy facil. Sean V, K los puntos extremos hasta donde se sumerge el areómetro en dos licores, siendo el uno el mas ligero, y el otro el mas pesado de todos aquellos cuyas gravedades específicas se quieren averiguar. Se dividirá el intervalo VK en quantas partes iguales ó desiguales se quieran; se meterá despues succesivamente el areómetro (aumentando ó disminuyendo su lastre) hasta todos los puntos de division en un fluido cuya pesantez específica sea dada; y determinando con las balanzas ordinàrias los pesos absolutos y succesivos del instrumento, hallarémos por el método propuesto (237) los volúmenes determinados que mete en el fluido. Es evidente que se puede conseguir que tengan estos volúmenes la razon que se quisiere, tomando los pesos en la razon correspondiente.

Los areómetros se hacen comunmente de vidrio, ú hoja de lata &c.; y es muy acertado y aun preciso hacer de vidrio los que se han de meter en licores corrosivos.

DE LA HIDRÁULICA.

246 Uno de los puntos mas importantes de la Hidráulica es valuar las cantidades de agua que salen por los orificios de los depósitos. Pero como pue-

puede salir este fluido ó de depósitos que se mantienen constantemente llenos, ó de depósitos que se vacian, son dos los casos que en esta materia pueden ofrecerse. En estos principios nós ceñiremos al primero; quiero decir, que indagáremos qué cantidades de agua salen por los orificios de los depósitos donde se mantiene el agua á una altura constante. Manifestaremos que luces dá acerca de esto la experiencia, refiriendo los resultados de muchos experimentos hechos con esta mira, cuyo aparato podrá ver el que quisiere en el Tomo V de mi Curso, pero primero sentarémos algunas proposiciones fundamentales en este asunto; y allí mismo dexo tratado con la correspondiente individualidad lo demas que acerca de este y otros puntos de Hidráulica tiene averiguado la teórica. Fig.

247 Sea *MCDN* un vaso qualquiera con una cantidad de agua *ACDB*, que sale por la abertura, luz ú orificio *PQ* hecho en el suelo *CD*. Enseña la experiencia que todas las partículas, comprimiéndose unas á otras, se encaminan al orificio. Baxan con velocidades sensiblemente verticales é iguales hasta llegar á cierta distancia del suelo, ó por mejor decir del plano orizontal que enrasa con el borde superior del orificio; cuya distancia, aunque dificil para determinada con puntualidad, se puede creer, en vista de repetidos experimentos que es de tres ó quatro pulgadas. Pasado este término, las partículas que corresponden verticalmente al orificio, se desvian de la direccion vertical, y vienen de todas partes á meterse por el orificio en direcciones mas ó menos oblicuas. En la figura que citamos suponemos que las secciones *AB*, *TV*, *RL*, *HE*, *FI* &c. planas ó curvas son perpendiculares á las direcciones de las mismas partículas, esto es, que las mismas partículas individuales que están en *AB*, baxan succesi- 100.

Fig. vamente á *TV*, *RL*, *HE*, *FI* &c. Se viene á los ojos que siempre deben ser unas mismas las secciones *AB*, *TV* &c. quando el vaso se mantiene constantemente lleno á una misma altura respecto del suelo, con nueva agua que entra en lugar de la que sale, y quando la evacuacion ha llegado á tomar un curso regular y permanente. Porque en unos mismos parages, así la direccion como la cantidad de la velocidad de las partecillas son unas mismas. Pero si creciese ó menguase la altura del fluido en el depósito, la naturaleza de las expresadas secciones no podrá menos de padecèr alguna alteracion, porque entonces no serán unas mismas las velocidades en unos mismos parages. La extremada mobilidad de las partículas, y la igual facilidad con que obedecen el impulso de la pesantez, ocasionan entre ellas un equilibrio de conatos, y una colocacion tales, que á pesar de su tendencia universal ácia el orificio, la superficie superior del fluido siempre se mantiene orizontal, por lo menos hasta una distancia muy corta del orificio.

101. 248 Lo propio sucede quando el fluido sale por una luz lateral. Al principio todas las partículas baxan perpendicularmente, despues se encaminan ácia la abertura, y siempre se mantiene orizontal la superficie superior. Sin embargo es de reparar en este caso, que si el orificio lateral *PQ* tiene una altura sensible en comparacion de la del agua en el depósito, no tienen una misma velocidad todas las partículas, y que por razon de una profundidad mayor, se mueven con mas velocidad ácia la parte inferior del orificio que ácia la superior, siendo así que en las evacuaciones por orificios orizontales no puede haber en la velocidad de las partículas ninguna desigualdad ocasionada por una profundidad desigual en los diferentes puntos del orificio.

100. 249 Sea orizontal ó lateral el orificio por donde sa-

sale el fluido; como las partículas que no correspon- Fig. den verticalmente al orificio, se encaminan no obs- 100 tante ácia él con movimientos mas ó menos oblicuos, 101 es evidente que intentan conservar dichos movimientos, y por consiguiente que el chorro ó la vena fluida, al salir de PQ, no puede menos de angostarse en cierto trecho Pp, y formar con esto una especie de pirámide truncada $PQpq$, cuya base menor pq corresponde al parage donde la vena dexa de angostarse para volver á tomar la forma prismática. Es de suma importancia atender á esta contraccion de la vena fluida, para medir con puntualidad los gastos de los depósitos por orificios propuestos. Es muy reparable en las evacuaciones por orificios hechos en paredes delgadas. Porque se la vé angostarse notablemente á la vena al salir del orificio, y se halla, conforme nos lo dirá muy en breve la experiencia, que la area del orificio PQ es á la area de la seccion pq en una razon que discrepa poco de la de 8 á 5. La seccion pq dista de PQ una cantidad igual con poca diferencia, al radio del orificio PQ. Quando el agua sale del depósito por tubos cilíndricos que se le acomodan, no transparentes, y suficientemente largos para que el agua siga sus paredes, y salga á boca libre, no es visible la contraccion de la vena fluida, pero no por eso dexa de verificarse al introducirse el agua en ellos. No hay mas diferencia sino que produce allí la contraccion un efecto menos notable que en el primer caso, porque entonces el gasto solo mengua en la razon de 16 á 13 con poca diferencia.

250 Sentado esto, supongamos como poco ha (247 y 248), un vaso $MCDN$ que eche agua por la luz PQ orizontal y lateral. Si el agua saliera por un tubo aditicio, discurriríamos de un modo análogo. Imaginemos el licor $ACBD$ dividido en una infinidad de rebanadas iguales $ABba$, $TVut$, $RLlr$ &c. por

Fig. 100. 101. superficies (planas ó curvas) infinitamente próximas y perpendiculares á las direcciones de las partículas del fluido. Sea *pqgf* el pequeño prisma de licor que sale en el instante que la superficie *AB* baxa á *ab*, la superficie *TV* á *tu* &c. es evidente que este prisma es igual á cada una de las rebanadas *ABba*, *TVut* &c. Porque conforme vá saliendo del vaso, vá entrando en su lugar forzosa é inmediatamente un prisma, ó una rebanada igual; y á no ser así, resultarian huecos entre las partículas fluidas, cuya consecuencia repugna con la extremada mobilidad de que están dotadas. Llamemos *B* la area de la base *TV* de una qualquiera de las rebanadas propuestas; *C*, la area *pq*; *x*, la altura del prisma que teniendo por base la area *B*, es igual á la rebanada *TVut*; *y*, la altura del prisma *pqgf*; resultará la equacion $Bx = Cy$; de donde sacarémos $x : y :: C : B$. Pero una vez que la superficie *TV* baxa á *tu* en el mismo tiempo que la superficie *pq* baxa á *fg*; es evidente que *x* é *y* representan las velocidades medias de las dos rebanadas *TVut*, *pqgf*. Así, debemos inferir que *la velocidad media de una rebanada qualquiera, tomándola en lo interior del fluido, es á la velocidad del licor á la salida del orificio, como la area del orificio es á la area de la una de las bases de la rebanada propuesta.*

251 Síguese de aquí que si el orificio fuese infinitamente pequeño respecto de las bases de cada una de las rebanadas iguales en que hemos supuesto dividido el licor, la velocidad media del licor á la salida del orificio, será infinita en comparacion de las velocidades medias de las diferentes rebanadas interiores; ó por mejor decir, como no hay en la naturaleza ninguna velocidad infinita, la velocidad del licor á la salida del orificio será finita, y las velocidades medias de las rebanadas interiores serán infinitamente pequeñas.

Los

252 *Los volúmenes pqfg, ikts de licores (buenos ó no* Fig.
de la misma especie) que salen en un mismo tiempo y 102.
con velocidades uniformes de los vasos MCDNEGHF 103.
por los orificios pq, ik, *son unos con otras como los*
productos de los orificios por las velocidades de las
evacuaciones.

Esto es evidente de suyo; porque los prismas *pqgf*, *ikts* son los productos de sus bases *pq*, *ik* por sus alturas *pf*, *is* corridas, segun suponémos, en tiempos iguales, y que por lo mismo representan las velocidades de los licores á su salida de los orificios *pq*, *ik*.

253 *La velocidad de un licor al salir de un de-*
pósito qualquiera MCDN *por un orificio infinitamente* 102.
pequeño pq, *es igual á la que adquiriría un cuerpo*
pesado si cayese de la altura vertical y constante hq
de la superficie superior AB *del fluido mas arriba del*
orificio pq.

Figurémonos el licor *ACDB* dividido en una infinidad de rebanadas iguales por superficies perpendiculares á las direcciones de las mismas partículas; las velocidades medias de las rebanadas interiores serán infinitamente pequeñas respecto de la velocidad del licor á la salida del orificio *pq* (251). Pero segun los principios de la caida de los graves (47), si todas las moléculas fluidas estuviesen entregadas á la accion libre de su propia pesantez, baxarian con una misma velocidad. Así, una vez que las rebanadas de mas arriba del orificio pierden la velocidad que tendrian naturalmente á impulsos de la pesantez; es evidente que el pequeño prisma fluido *pqgf* que sale cada instante, está comprimido ó impelido del licor superior, del mismo modo que se hallaría oprimido un tapon puesto en el orificio para impedir la evacuacion. Por consiguiente, si llamamos p' la pesantez específica ó la densidad del fluido, podrá representar (205) $p' \times hq \times pq$ la fuerza motriz que arroja el prisma *pqgf*.

Fi-

Fig. Figurémonos que en el tiempo que la presion $p'\times bq\times pq$ arroja el prisma $pqgf$, sola la pesantez absoluta de un prisma $pqxy$, que $p'\times pq\times qx$ puede expresar, haga que este mismo prisma $pqxy$, considerándole como immobil al principio de su movimiento, ande la corta altura qx. Sentado esto, es evidente que por ser (132) las fuerzas motrices $p'\times bq\times pq$, $p'\times qx\times pq$ proporcionales á las cantidades de movimiento que producen, si llamamos V y u las velocidades que comunican á las masas $pqgf$, $pqxy$, tendremos $p'\times bq\times pq : p'\times qx\times pq :: pqgf\times V : pqxy\times u$, ó (252) $p'\times bq\times pq : p'\times qx\times pq :: pq\times V\times V : pq\times u\times u$, y por consiguiente $bq : qx :: V^2 : u^2$, ó si no $bq : V^2 :: qx : u^2$. Sea v la velocidad que adquiriría un cuerpo grave si cayese de la altura bq, tendremos (48) $qx : u^2 :: bq : v^2$. Luego por una serie de razones iguales saldrá $bq : V^2 :: bq : v^2$, y por consiguiente $V^2 = v^2$, ó $V = u$. Por donde se echa de ver que la velocidad V del fluido á la salida del orificio es igual á la velocidad v que adquiriría un cuerpo pesado si cayese de la altura bq del fluido en el depósito. Luego

254 Una vez que la velocidad del licor á la salida del orificio es la misma que ocasionaría la caida vertical bq, es patente que (48) si continuase uniformemente esta velocidad, andaría el licor un espacio igual á $2bq$ en el mismo tiempo que gastaría un cuerpo pesado para caer de la altura bq.

255 Cuestion. *Hallar una equacion para expresar la relacion que hay entre la cantidad de licor que sale de un depósito qualquiera* MCDN *por el pequeño orificio* pq *orizontal ó lateral, el tiempo de la evacuacion, y la altura del fluido en el depósito.*

Bien se echa de ver que quando el orificio es lateral, debe ser tan chico, ó estar situado de tal modo que puedan considerarse todos sus puntos como que estan á una misma distancia de la superficie del

del agua. Llamemos K la area del orificio pq; t, el tiempo de la evacuacion; b, la altura constante bq del agua en el depósito; Q, la cantidad de agua que ha salido en el tiempo t; t', el tiempo que gastaría un cuerpo grave para caer desde una altura dada a. Es evidente (48) que el quarto término $\frac{t'\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$ de la proporcion $\sqrt{a} : \sqrt{b} :: t'$, expresará el tiempo que gastaría un cuerpo pesado para caer de la altura b. Pero es así que durante este tiempo debe salir una columna fluida, cuya base es la area K, y la altura es (254) $2b$, por ser constante la altura b, y ser por lo mismo uniforme la velocidad á la salida del orificio. Por consiguiente $2Kb$ expresa la columna ó cantidad de fluido que sale en el tiempo $\frac{t'\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$. No es menos evidente que las cantidades de fluido que salen en los tiempos $\frac{t'\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$ y t, son unas con otras como estos tiempos; luego tendremos $\frac{t'\sqrt{b}}{\sqrt{a}} : t :: 2Kb : Q$, y por consiguiente $Q = \frac{2tK\sqrt{ab}}{t'}$, en cuya fórmula está cifrada la relacion que se pide. Fig. 102.

De las seis cantidades que incluye esta fórmula, hay dos, es á saber t' y a, que siempre son constantes; por lo dicho (48) consta que quando $a =$ 15 pies 1 pulg. $t = 1''$.

Sea $b = 12$ pies, el diámetro del orificio que suponemos circular $= 1$ pulg. y $t = 1''$. Substituyendo estos datos en la equacion antecedente, y substituyendo 15 pies 1 pulg. en lugar de a, y $1''$ en lugar de t', sacarémos $Q = 15216$ pulg. cúbicas con muy corta diferencia. Para conocer el peso de esta cantidad de agua se hará esta proporcion: 1728 pulg. cúbicas son á 15216 pulg. cúbicas, como 70 libras, que es lo que pesa comunmente un pie cúbico de agua dulce son á 616 libras, al poco mas ó menos; pesarán, pues, 616 libras las 15216 pulgadas cúbicas.

El

Fig. 102. 256 El mismo camino seguiríamos para determinar las evacuaciones por aberturas laterales cuyos puntos no pueden suponerse todos igualmente distantes de la superficie del fluido.

Porque por lo dicho (253) podemos suponer en las evacuaciones de que vamos hablando, que la velocidad de cada punto del orificio es igual á la que adquiriría un cuerpo grave si cayera de la altura del fluido, que corresponde á dicho punto. En virtud de esta hypótesi, nos figuraremos el orificio propuesto dividido en una infinidad de rectángulos ó trapecios por planos orizontales, y considerando cada uno de estos trapecios elementales como un orificio particular cuyos puntos se puede suponer que todos distan igualmente de la superficie del fluido, se determinará la cantidad de licor (255) que debe dar en un tiempo dado. Solo faltará hallar despues la suma de todas estas cantidades elementales de fluido, para conocer la cantidad total que dará todo el orificio en el mismo tiempo.

Todo esto presupuesto, veamos qué es lo que la experiencia nos enseña acerca de las evacuaciones de que vamos tratando, ora salga el fluido por orificios hechos en paredes delgadas, ora salga por tubos añadidos.

Evacuaciones por orificios hechos en paredes delgadas.

257 Los orificios de que hablamos aquí se habian hecho muy perpendicularmente en planchas de cobre que tenian cerca de ½ linea de grueso. Primero referirémos los hechos; despues manifestarémos las consecuencias que de ellos se deducen.

258 Experimentos I, II ... VI. En todos estos experimentos el agua se mantuvo en el depósito á la altura constante de 11 pies 8 pulg. 10 lin. mas arriba

ba de cada orificio, y se repararon los hechos siguientes. Fig.

I. En 50 segundos, una abertura orizontal y circular de 6 lineas de diámetro dió 1 pie cúbico de agua +198 pulgadas cúbicas, esto es, en todo 1926 pulgadas cúbicas.

II. En 90 segundos, una abertura orizontal y circular de 1 pulg. de diámetro dió 8 pies cúbicos de agua +97 pulgadas cúbicas, esto es, en todo 13921 pulgadas cúbicas.

III. En 21 segundos, una abertura orizontal y circular de 2 pulg. de diámetro dió 8 pies cúbicos de agua — 803 pulgadas cúbicas, esto es, en todo 13021 pulgadas cúbicas.

IV. En 50 segundos, una abertura orizontal y rectangular de 1 pulg. de largo, y 3 lin. de ancho dió 1 pie cúbico de agua +716 pulgadas cúbicas, esto es, en todo 2444 pulgadas cúbicas.

V. En 71 segundos, una abertura orizontal y quadrada de 1 pulg. de lado dió 8 pies cúbicos de agua + 160 pulgadas, esto es, en todo 13984 pulgadas cúbicas.

VI. En 17 segundos, una abertura orizontal y quadrada de 2 pulgadas de lado dió 8 pies cúbicos de agua —405 pulgadas cúbicas, esto es, en todo 13419 pulgadas cúbicas.

Resultado de estos experimentos.

299. Una vez que la altura del fluido se mantiene constantemente la misma respecto del orificio todo el tiempo que dura la evacuacion, y sale por lo mismo el agua por dicho orificio con una velocidad uniforme, es evidente que las cantidades de agua que dá en tiempos diferentes una misma abertura, son entre sí como los tiempos mismos. Así, reduciendo todos los tiem-

Fig. tiempos de las evacuaciones propuestas á una misma medida, y tomando 1 minuto por esta medida comun, formarémos la tabla siguiente solo con hacer algunas proporciones. Como es imposible tengamos seguridad de que un mismo experimento, bien que repetido muchas veces, sea exâcto sin diferencia de 1 ó 2 pulgadas, mayormente quando es considerable el gasto de agua, no nos ha parecido del caso embrollar estas tablas con las fracciones que las proporciones suelen dar. Quando estas fracciones son menores que $\frac{1}{2}$, no las llevamos en cuenta; y quando valen $\frac{1}{2}$ ó mas de $\frac{1}{2}$, ponemos 1 en su lugar.

Altura constante del agua mas arriba de cada orificio = 11 pies 8 pulg. 10 lin.	Número de púlg. cúbicas de agua que salieron en 1 minuto.
Por el orif. circ. de 6 lin. de diám.	. . 2311
Por el orif. circ. de 1 pulg. de diám.	. . 9281
Por el orif. circ. de 2 pulg. de diám.	. . 37203
Por el orif. rect. de 1 pulg. por 3 lin.	. . 2933
Por el orif. quad. de 1 pulg. de lado.	. . 11817
Por el orif. quad. de 2 pulg. de lado.	. . 47361

260 Experimentos VII y VIII. El agua salia por orificios verticales, y en cada experimento se mantenia en el depósito á la altura constante de 9 pies mas arriba del centro de la abertura.

I. En 55 segundos, una abertura vertical y circular de 6 lineas de diámetro dió 1 pie cúbico de agua +122 pulgadas cúbicas, esto es, en todo 1850 pulgadas cúbicas.

II.

II. En 100 segundos, una abertura vertical y Fig. circular de 1 pulg. de diámetro dió 8 pies cúbicos de agua —266 pulgadas cúbicas, esto es, en todo 13558 pulgadas cúbicas.

Resultado de estos experimentos.

261 Reduciendo los tiempos de las evacuaciones á 1 minuto, y executando proporciones análogas á las de antes (259), se formará la tabla siguiente.

Altura constante del agua mas arriba del centro de cada orificio = 9 pies.	Número de pulg. cúbicas de agua que salieron en 1 minuto.
Por el orif. circ. de 6 lin. de diám.	. . 2018
Por el orif. circ. de 1 pulg. de diám.	. . 8135

262 Experimentos IX y X. El agua salia por dos orificios iguales, cada uno al suyo, con los dos antecedentes; y se mantenia en el depósito á la altura constante de 4 pies mas arriba del centro de la abertura.

I. En 60 segundos, una abertura vertical y circular de 6 lineas de diámetro dió 1353 pulg. cúbicas de agua.

II. En 150 segundos, una abertura vertical y circular de 1 pulg. de diámetro dió 8 pies cúbicos de agua —233 pulgadas cúbicas, esto es, en todo 13591 pulgadas cúbicas.

Resultado de estos experimentos.

263 Tomando como hasta aquí el minuto por la uni-

Fig. unidad de tiempo, se formará la tabla siguiente.

Altura constante del agua mas arriba del centro de cada orificio = 4 pies.	Número de pulg. cúbicas de agua que salieron en 1 minuto.
Por el orif. circ. de 6 lin. de diám.	. . 1353
Por el orif. circ. de 1 pulg. de diám.	. . 5436

264 Experimento XI. Manteniéndose el agua en el depósito á la altura constante de 7 lineas mas arriba del centro de una abertura vertical y circular de 1 pulg. de diámetro, en 2 minutos 45 segundos, salió 1 pie cúbico de agua. Esto viene á ser lo mismo que si hubiera dado 628 pulg. cúbicas en 1 minuto.

265 Cada una de las tablas antecedentes manifiesta que los *gastos hechos en tiempos iguales por diferentes aberturas, siendo una misma la altura del fluido en el depósito, son una con otra, con corta diferencia, como las areas de dichas aberturas.*

Porque tomemos, v. gr. en la primera tabla las cantidades 37203 pulgadas cúbicas, y 9281 pulgadas cúbicas, que dieron las dos aberturas circulares, la una dos pulg. de diámetro, la otra de 1 pulg. de diámetro; se echa de ver que éstos dos gastos tienen uno con otro, con corta diferencia, la razon de 4 á 1, la misma que hay entre las dos aberturas (I.580). Lo mismo se verifica en los casos parecidos al que consideramos.

266 Si comparamos una con otra dos qualesquiera de dichas tablas, hallarémos *que los gastos hechos en tiempos iguales por una misma abertura, siendo distintas las alturas de los depósitos, son una con otra,*

otra, con corta diferencia, como las raices quadradas de las alturas correspondientes del agua en los depósitos mas arriba de las mismas aberturas. Fig.

Así, v. gr. si tomamos en las tablas segunda y tercera los gastos 8135 pulg. cúbicas, y 5436 pulg. cúbicas que dió un mismo orificio de 1 pulg. de diámetro, siendo la altura del agua en el depósito 9 pies y 4 pies, se verá que dichos gastos están sensiblemente uno con otro en la razon de 3 á 2, la misma que hay entre las raices de las alturas.

267. Síguese de lo que acabamos de decir (265 y 266) que en general *las cantidades de agua que gastan en el mismo tiempo diferentes aberturas, siendo distintas las alturas en los depósitos, están unas con otras en razon compuesta de las areas de las aberturas, y de las raices quadradas de las alturas de los depósitos.*

Porque si llamamos Q y q las cantidades de agua gastadas en un mismo tiempo por dos luces o y O, siendo una misma la altura del depósito; q y Q', las cantidades de agua gastadas en el mismo tiempo por una misma abertura O, con dos alturas distintas b y H de depósito; tendremos en virtud de lo probado (265 y 266) $Q : q :: o : O$, y $q : Q' :: \sqrt{b} : \sqrt{H}$, cuyas proporciones dán (I.169) $Q : Q' :: o\sqrt{b} : O\sqrt{H}$.

Esta regla general es bastante exácta para lo que suele ofrecerse en la práctica. Pero quando se quisieren apreciar las evacuaciones con escrupulosa puntualidad, deberán tenerse presentes las prevenciones que haremos dentro de poco.

268 En todo lo declarado hablamos, segun se echa de ver, de orificios chicos no mas en comparacion de la amplitud del depósito. Porque como el mayor era un quadrado de 2 pulg. de lado, siendo así que el suelo del depósito era un quadrado de 3 pies de lado, la superficie del primer quadrado era á la

 del

Fig. del segundo, como 1 á 324. Los resultados serian todavía los mismos aun quando fuesen mayores los orificios respecto de la amplitud del depósito.

269 Hemos probado (255) que siendo t' el tiempo que gasta un grave en caer desde la altura dada a; Q, la cantidad de agua que sale en un tiempo dado t, por un orificio chico K, siendo constante la altura b del depósito, tenemos $Q = \frac{2tK\sqrt{ab}}{t'}$. Si llamamos tambien respectivamente Q', K', b' las cantidades análogas á Q, K, b respecto de otro depósito, y suponemos que sean iguales los tiempos de las evacuaciones, será $Q' = \frac{2tK'\sqrt{ab'}}{t'}$. Luego $Q : Q' :: \frac{2tK\sqrt{ab}}{t'} : \frac{2tK'\sqrt{ab'}}{t'} :: K\sqrt{b} : K'\sqrt{b'}$, cuya proporcion viene á ser la misma de antes (267). Por consiguiente prueban juntas la teórica y la experiencia que los gastos hechos en tiempos iguales por diferentes orificios, son como los productos de los mismos orificios por las raices de las alturas de los depósitos.

270 Pero aunque los gastos efectivos estén unos con otros, sensiblemente por lo menos, en la misma razon que los gastos naturales y teóricos, no por esto se debe inferir que los primeros sean iguales con los segundos, porque no lo son con efecto, y lo probarémos.

Busquemos por medio de la fórmula $Q = \frac{2tK\sqrt{ab}}{t'}$ el gasto que haría en 1 minuto un orificio circular de 1 pulg. de diámetro, siendo de 9 pies la altura del agua del depósito, en el supuesto de que salga el fluido perpendicularmente al plano del orificio, y que ningun obstáculo altere su evacuacion natural. Haciendo $a = 15$ pies, $t' = 1''$, hallarémos $Q = 13144$ pulg. cúbicas poco mas ó menos. Pero la experiencia enseña (261) que el gasto que hace realmente el orificio propuesto no es mas que de 8135 pulg. cúbicas.

Fal-

Falta, pues, mucho para que el gasto efectivo sea igual con el gasto teórico. El primero es al segundo, con corta diferencia, como 100 es á 161,57, cuya razon discrepa poco de la de 5 á 8. Esta misma razon se verifica tambien con poquísima diferencia en todos los demas casos. Fig.

271 Dos son las causas de que pende la merma del gasto, es á saber, el rozamiento, y la contraccion de la vena fluida. El efecto de la primera es poco reparable, la merma del gasto debe atribuirse casi toda á la contraccion de la vena fluida. Tambien prevenimos que esta merma no proviene de diminucion alguna, sensible por lo menos, de la velocidad del fluido al salir del orificio. Porque

Dexamos probado (253) que la velocidad al salir de todo orificio muy pequeño en comparacion de la latitud del depósito, proviene de toda la altura del fluido en el depósito mas arriba del mismo orificio.

272 Síguese de aquí que se podrán determinar por lo dicho (255) con arreglo á la experiencia, y muy cabalmente las evacuaciones de los fluidos que salen de vasos que se mantienen constantemente llenos, por orificios chicos, solo con disminuir la area verdadera del orificio en la razon de 8 á 5, con corta diferencia, sin hacer mudanza alguna en los demas datos de la cuestion.

273 Las evacuaciones que se hacen por aberturas laterales de altura notable respecto de la del depósito, experimentan tambien los efectos de la contraccion. Esta siempre disminuye el gasto teórico en la razon de 8 á 5, con corta diferencia. Así, quando se quisiere aplicar á la práctica lo dicho (256), deberá tenerse presente esta prevencion.

274 Ahora hemos de llevar en cuenta los efectos del rozamiento y de la contraccion de la vena fluida. Se mezclan y complican una con otra de tal modo es-

Fig. tas dos causas, que es dificultosísimo separarlas, y señalar separadamente á punto fixo los efectos de cada una. Procuremos no obstante hacer hasta cierto punto por lo menos esta separacion. Empezarémos por el rozamiento.

275 Parece evidente que con una misma altura de agua en el depósito, la vena se ha de contraer del mismo modo al salir por dos orificios de una misma especie, de superficies deiguales, y ambos muy pequeños en comparacion de la amplitud del depósito. Si acaso hay alguna diferencia en la contraccion, no puede menos de ser muy leve, y como infinitamente pequeña. Se puede, pues, suponer en este caso que el rozamiento es la única resistencia que causa alguna diferencia, si la hay, en la razon que deberian tener uno con otro los gastos. Pero sea la que fuere la naturaleza de esta resistencia, es constante que quanto mayor fuere el número de los puntos que rozan con el borde del orificio en comparacion de la extension de su superficie, tanto mas reparable será el menoscabo que el rozamiento ocasionare en el gasto. Así, de dos orificios semejantes y desiguales, el menor ha de dar menos que el otro á proporcion; porque la razon de los perímetros varía menos que la de las superficies. Si consideramos v. gr. dos orificios circulares, el uno de 1 pulg. de diámetro, y el otro de 2 pulg. de diámetro, echarémos de ver que el primero ha de dar menos agua á proporcion que el segundo; porque como el perímetro del primero es la mitad del perímetro del segundo (I. 528), siendo así que las superficies están en razon de 1 á 4 no mas (I. 580); es evidente que respecto de las superficies, el primer orificio presenta mas puntos que el otro á la accion del rozamiento. Esto mismo lo confirma la experiencia, conforme se echa de ver en cada una de nuestras tablas. Luego podemos sentar es-

esta regla general: *El rozamiento es causa de que entre muchos orificios semejantes, los chicos dan á proporcion menos que los grandes, con una misma altura de agua en el depósito.* Fig.

276 De las mismas observaciones se saca estotra regla: *Entre muchos orificios de igual superficie, aquel cuyo perímetro es menor, debe por razon del rozamiento dar mas agua que los demas, siendo una misma la altura del depósito.* Por esta razon los orificios circulares son, en quanto á esto, mejores que los demas. Porque entre todas las figuras isoperímetras el círculo es la que tiene mayor superficie (I. 587).

277 Supongamos ahora dos orificios iguales y semejantes, pero á distancias desiguales de la superficie del agua del depósito. Sean *H* y *h* estas distancias, y supongamos *H* mayor que *h*. Una vez que en ambos casos es uno mismo el número de puntos que rozan; si hay alguna diferencia en los rozamientos, esta solo provendrá de las alturas *H* y *h*. Pero por otra parte, como la contraccion de la vena fluida puede no ser la misma respecto de un mismo orificio, siendo distintas las alturas del agua en el depósito, no es posible decidir si el rozamiento tiene algun influxo en las variaciones que se reparan en la proporcion de los gastos, á no ser que alguna teórica dé á conocer la naturaleza de esta resistencia. Pero entre las diferentes hypótesis que se pueden seguir acerca de esto, propondremos dos que tienen la ventaja de ser muy sencillas, siendo la segunda tal que parece apartarse poco de la verdad. Siempre entendemos hablar de la accion *media* del rozamiento distribuida entre toda la area del orificio. Pero es evidente que no es el mismo en toda dicha extension, y que por este efecto del movimiento de las partículas que resbalan inmediatamente en la arista del orificio, ha de ir menguando desde la circunferencia al centro.

 Su-

Fig. 278 Supongamos primero que el rozamiento sea proporcional á la presion, ó á la altura del fluido en el depósito. Si llamamos F esta resistencia respecto de una altura *dada* L, será $\frac{F}{L} \times H$ respecto de la altura H, y $\frac{F}{L} \times b$ respecto de la altura b. Luego estará figurada en $H - \frac{F}{L} \times H$ la fuerza que causa la evacuacion quando es H la altura, y en $b - \frac{F}{L} \times b$ la que produce la evacuacion quando la altura es b. Pero es evidente que tenemos la proporcion $H - \frac{F}{L} \times H : b - \frac{F}{L} \times b :: H : b$. Por consiguiente, los dos gastos que hace el orificio propuesto, llevando en cuenta el rozamiento, serían uno con otro como si no hubiese rozamiento. Así, en esta primera hypótesi el rozamiento no coadyuvaría de ningun modo para alterar la razon de los gastos que hace un mismo orificio siendo diferentes las alturas del depósito. Pero padece sus dificultades esta hypótesi. ¿Por que razon ha de seguir el rozamiento la razon de las alturas ó de los quadrados de las velocidades? Es indubitable que quantos mas son los puntos que rozan en un tiempo dado, tanto mayor es el efecto del rozamiento. Esto parece suponer que el rozamiento sea proporcional á la simple velocidad, y no se alcanza por que ha de entrar en su expresion el quadrado de la velocidad. No la lleva respecto de los cuerpos sólidos, y parece que la ley ha de ser una misma en ambos casos.

279 Supongamos, pues, en segundo lugar que el rozamiento sea proporcional á la simple velocidad, ó á la raiz de la altura del fluido en el depósito. En este caso, la fuerza que produce la evacuacion, siendo H la altura, es $H - \frac{F}{\sqrt{L}} \times \sqrt{H}$; y la fuerza que causa la evacuacion siendo b la altura, será

b

$b - \frac{F}{\sqrt{L}} \times \sqrt{b}$. Pero ya que $H > b$, tenemos $H - \frac{F}{\sqrt{L}} \times \sqrt{H} : b - \frac{F}{\sqrt{L}} \times \sqrt{b} > H : b$, conforme lo echará de ver el que considerare que el producto de los extremos es mayor que el producto de los medios. Luego en esta hypótesi el rozamiento ha de ser menos sensible con la mayor altura H que con la menor b. La variacion que esto causa en la razon de los gastos, es extremadamente corta respecto de orificios hechos en paredes delgadas; bien que puede ser reparable en tubos de alguna longitud. Enseña con efecto la experiencia, que respecto de diferentes alturas de depósitos un mismo tubo dá mas á proporcion con alturas grandes que con pequeñas; esto prueba quan natural es la hypótesi de que estamos hablando. Fig.

280 Sentado esto, veamos que consecuencias hemos de sacar de los experimentos referidos acerca de las variaciones que padece la razon de los gastos de un mismo orificio con distintas alturas de agua en el depósito. Si se comparan unos con otros por medio de nuestras tablas los gastos de un orificio circular de 1 pulg. de diámetro, respecto de las tres alturas 11 pies 8 pulg. 10 lin. 9 pies, 4 pies; se hallará que atendiendo á la proporcion de las alturas, el gasto es mayor respecto de una altura pequeña que respecto de otra mayor. Este resultado es cabalmente contrario al que se sacaría de lo dicho (279), si la variacion de que se trata proviniese del rozamiento. Inferamos, pues, que esta misma variacion no es efecto del rozamiento, y que su causa es la mayor ó menor contraccion de la vena, conforme la altura del fluido en el depósito es mayor ó menor. Esta explicacion nos parece evidente, porque ya que las partículas comprimen perpendicularmente el plano del orificio quando está todavía tapado, y quando se le llega á destapar, la contraccion es efecto del movimiento obli-

Fig. obliquo de las partículas laterales; quanto mayor es este movimiento, ó quanto mayor es la altura del fluido en el depósito, tanto mas se ha de contraher tambien la vena fluida. Luego podemos sentar esta regla: *En virtud de un leve aumento que le sobreviene á la contraccion de la vena, á medida que crece la altura del fluido en el depósito, el gasto debe menguar un poco.* Verdad es que á este efecto se le opone algun tanto el rozamiento; pero aquí se debe despreciar el efecto de esta última fuerza.

281 Modificando los resultados teóricos por medio de las observaciones precedentes, se determinarán los gastos con una puntualidad mayor de la que se necesita ó busca en la práctica comun, pero de la qual se paga mucho el entendimiento, aun quando no la quiere aprovechar.

Supongamos v. gr. un depósito en el qual se mantiene constantemente el agua á la altura de 5 pies mas arriba de un orificio de 9 lineas de diámetro, hecho en una pared delgada, y propongámonos averiguar qué cantidad efectiva de agua dará este orificio en 1 minuto.

Buscaré primero por la fórmula (255) el gasto natural del mismo orificio, y hallo que en 1 minuto es de 5510 pulg. cúbicas. Despues busco tambien el gasto natural de un orificio de 6 lineas de diámetro con 4 pies de altura de agua en el depósito; este gasto es de 2191 pulg. cúbicas, siendo así que el gasto efectivo correspondiente no pasa (263) de 1353 pulg. cúbicas. Pero es evidente que los dos gastos naturales que acabamos de determinar han de ser uno con otro, con cortísima diferencia, como los gastos efectivos correspondientes. Porque infiriendo de la altura de 4 pies lo que ha de suceder con la de 5 pies, el gasto efectivo tendrá un poco de aumento; pero tambien si inferimos de un orificio de 6 lineas de diá-

diámetro lo que ha de suceder con un orificio de 9 lineas de diámetro, el gasto padecerá alguna merma: esto produce una compensacion, y no puede menos de introducir entre los gastos efectivos una razon muy aproxîmada á la verdadera. Haciendo, pues, esta proporcion 2191 : 1353 :: 5510 pulg. cúbicas : un quarto término 3402 pulg. cúbicas, este será el gasto que buscámos.

282 Supongamos que con una misma altura constante de 4 pies en el depósito haya dos orificios, el uno de 1 pulg. de diámetro, el otro incógnito, y tal que su gasto haya de ser cabalmente la quarta parte del gasto del primero en un mismo tiempo: vamos á determinar el diámetro del segundo orificio.

Es constante que si no hubiese ninguna causa de atraso, y diesen las aberturas pequeñas tanto á proporcion como las grandes, el orificio que buscamos debería tener 6 lineas de diámetro. Pero como los orificios chicos dán (275) un poco menos á proporcion que los grandes, el orificio de que se trata ha de tener algo mas de 6 lineas de diámetro, y le determinaremos como sigue.

Hemos visto (263) como con una altura constante de 4 pies de agua en el depósito, un orificio de 1 pulgada de diámetro dá en 1 minuto 5436 pulgadas cúbicas de agua. Tomemos la quarta parte de esta cantidad, y sacarémos 1359 pulg. cúbicas, las quales serán el gasto del orificio que buscamos (265). Pero (263) un orificio de 6 lineas de diámetro gasta en 1 minuto 1353 pulgadas cúbicas. Estos dos gastos discrepan poco uno de otro; luego los dos orificios discrepan poco uno de otro; y con mas razon sus perímetros discrepan todavía menos á proporcion de sus areas. Así, la desigualdad que causa el rozamiento en los dos orificios, ha de ser como infinitamente pequeña. Luego si hacemos esta proporcion 1353 :

1359

Fig. 135 9 :: 36 : á un quarto término, este quarto término expresará en lineas quadradas el quadrado del diámetro del orificio que se busca. Concluyendo el cálculo, saco que dicho orificio ha de tener unas 6,014 lineas de diámetro. El exceso que lleva este diámetro al de 6 lineas es apenas reparable; pero hay casos en que no son de despreciar estos excesos.

283 Concluiremos con dar una tabla comparativa del gasto natural con el gasto efectivo, respecto de un orificio de una pulgada de diámetro, siendo distintas las alturas de depósito. Los gastos efectivos que no se han sacado inmediatamente de los experimentos, se han determinado con las precauciones expresadas (281 y 282); y todos ellos se han de considerar tan exáctos, con corta diferencia, como si fuesen resultados de experimentos directos. Por medio de esta tabla, y de las reglas precedentes, se determinarán facilmente los gastos respecto de otros orificios hechos en paredes delgadas, y de otras alturas de depósitos. Mas adelante manifestarémos los usos de esta tabla; la aplicarémos ahora á un caso particular.

Averigüemos el gasto que hará en 1 minuto un orificio de 3 pulg. de diámetro, con 30 pies de altura de depósito.

Una vez que los gastos naturales de dos orificios, en tiempos iguales, son como los productos de los mismos orificios por las raices de las alturas de los depósitos (269), y el gasto natural de un orificio de 1 pulgada de diámetro, con 15 pies de altura de depósito, es por nuestra tabla, 16968 pulg. cúbicas en 1 minuto; tendremos $1\sqrt{15} : 9\sqrt{30}$ :: 16968 pulg. cúbicas : un quarto término 215961 pulg. cúbicas, gasto natural del orificio propuesto. Disminuyendo este gasto en la razon de $8\frac{1}{10}$ á 5 por causa de la contraccion de la vena (272), sacarémos 133309 pulg. cúbicas, estas serán el gasto efectivo del mismo orificio.

Al-

Fig.

Alturas constantes del agua en el depósito sobre el orificio expresadas en pies.	Gasto natural en 1 min. por un orificio de 1 pulg. de diámetro, expresado en pulg. cúbicas.	Gasto efectivo en el mismo tiempo por el mismo orificio, expresado tambien en pulg. cúbicas.
1 . . .	. . . 4381 . . .	. . . 2722
2 . . .	. . . 6196 . . .	. . . 3846
3 . . .	. . . 7589 . . .	. . . 4710
4 . . .	. . . 8763 . . .	. . . 5436
5 . . .	. . . 9797 . . .	. . . 6075
6 . . .	. . . 10732 . . .	. . . 6654
7 . . .	. . . 11592 . . .	. . . 7183
8 . . .	. . . 12392 . . .	. . . 7672
9 . . .	. . . 13144 . . .	. . . 8135
10 . . .	. . . 13855 . . .	. . . 8574
11 . . .	. . . 14530 . . .	. . . 8990
12 . . .	. . . 15180 . . .	. . . 9384
13 . . .	. . . 15797 . . .	. . . 9764
14 . . .	. . . 16393 . . .	. . . 10130
15 . . .	. . . 16968 . . .	. . . 10472

De las Evacuaciones por caños.

284 Experimentos I . . IV. La altura constante del agua en el depósito mas arriba del orificio de salida era de 3 pies 10 pulg. Este orificio de salida 104.
era *ST* ú *OP* quando el agua seguia las paredes del caño, y *QH* ó *MN* quando el agua no seguia las paredes del caño.

I. Quando el agua salia por el caño *QSTH* de 6 lineas de diámetro, siguiendo sus paredes, en 1 minuto dió 1689 pulg. cúbicas de agua.

II.

Fig. II. Quando salia el agua por el mismo caño, pero tocando el borde superior QH no mas, sin seguir lo restante de las paredes, en 80 segundos dió 1724 pulg. cúbicas de agua.

III. Quando el agua salia por el caño *MOPN* de 10 lineas de diámetro, y seguia sus paredes, en 24 segundos dió 1881 pulg. cúbicas de agua.

IV. Quando salia el agua por el mismo caño, pero sin hacer mas que tocar el borde superior *MN*, sin seguir lo restante de las paredes, en 30 segundos dió 1799 pulg. cúbicas de agua.

285 Experimentos V.. VIII. La altura constante mas arriba del orificio de salida era de 2 pies.

I. Quando el agua salia por el caño *QSTH* de 6 lineas de diámetro, siguiendo sus paredes, en 85 segundos dió 1731 pulg. cúbicas de agua.

II. Quando salia el agua por el mismo caño sin hacer mas que tocar su borde superior QH, sin seguir lo restante de las paredes, en 110 segundos dió 1714 pulg. cúbicas de agua.

III. Quando el agua salia por el caño *MOPN* de 10 lineas de diámetro, siguiendo sus paredes, en 30 segundos dió 1701 pulg. cúbicas de agua.

IV. Quando salia el agua por el mismo caño, sin hacer mas que tocar su borde superior *MN*, sin seguir lo restante de sus paredes, en 40 segundos dió 1735 pulg. cúbicas de agua.

286 De estos experimentos se saca la tabla siguiente.

Fig.

Alturas constantes del agua en el depósito mas arriba del orificio de salida, expresadas en lineas.	Diámetros de los tubos expresados en lineas.	Pulg. cúbicas de agua gastadas en 1 minuto.
552	6 } Saliendo el agua	1689
	10 } á caño lleno.	4703
	6 } No siguiendo el	1293
	10 } agua las paredes.	3598
288	6 } Saliendo el agua	1222
	10 } á caño lleno.	3402
	6 } No siguiendo el	935
	10 } agua las paredes.	2603

287. Manifiesta esta tabla que *los gastos por diferentes caños añadidos, con una misma altura de agua en el depósito, son sensiblemente proporcionales á las areas de las superficies, ó á los quadrados de sus diámetros.*

Estos experimentos se hicieron con caños de una misma altura, á fin de que las circunstancias del rozamiento fuesen unas mismas quanto cabe; sin embargo, el caño de 10 lineas de diámetro dá algo mas á proporcion que el otro.

288. Manifiesta la misma tabla que *los gastos por tubos añadidos de un mismo diámetro, con alturas diferentes en los depósitos, son sensiblemente propor-*

cio-

Fig. *cionales á las raices quadradas de las alturas de los depósitos.*

Acerca de esto prevenimos que las alturas cortas en los depósitos dán á proporcion alguna agua mas que las grandes. Pero si los caños fuesen muy largos, sucedería lo contrario por razon del rozamiento.

289 De lo que acabamos de decir (287 y 288) se infiere que en general *los gastos que hacen en un mismo tiempo diferentes caños aditicios, con diferentes alturas en el depósito, son unos con otros con corta diferencia, como los productos de los quadrados de los diámetros de los caños por las raices quadradas de las alturas de los depósitos.*

Esto está diciendo que las evacuaciones por tubos aditicios siguen entre ellas las mismas leyes que las que se hacen por orificios hechos en paredes delgadas, y que por lo mismo las prevenciones hechas acerca de esto se aplican tambien á los primeros con las mudanzas correspondientes.

290 Si comparamos unos con otros los gastos, quando el agua sale á caño lleno, y quando se separa de las paredes, siendo una misma la altura de depósito mas arriba del orificio de salida, y los llamamos respectivamente Q y q; sacarémos (286) las proporciones siguientes:

$$Q : q :: 1689 : 1293, \quad Q : q :: 4703 : 3598;$$
$$Q : q :: 1222 : 935, \quad Q : q :: 3402 : 2603.$$

La segunda razon de cada una de estas proporciones se acerca mucho á la de 17 á 13, ó de 13 á 10; y en la práctica se puede suponer, sin recelo de error sustancial, que $Q : q :: 13 : 10$.

291 Luego si quisiésemos que un caño aditicio, y un orificio hecho en una pared delgada dén, con una misma altura de depósito, una misma cantidad de agua en un mismo tiempo, será preciso que sus diámetros estén en razon de $\sqrt{10}$ á $\sqrt{13}$. Porque supon-

pongamos que, para una misma altura de depósito, haya un caño aditicio, cuyas paredes sigue el agua, y dos orificios hechos en una pared delgada; que el gasto del caño en el tiempo propuesto sea Q, el diámetro del mismo caño $= D$; que los gastos de los dos orificios en el mismo tiempo, sean q y q', sus diámetros D y d. Tendremos las dos proporciones siguientes $Q : q :: 13 : 10$ (290), $q : q' :: D^2 : d^2$ (265); luego $Q = q \times \frac{13}{10}$, y $q' = q \times \frac{d^2}{D^2}$. Así, para que q' sea $= Q$, es preciso que sea $q \times \frac{d^2}{D^2} = q \times \frac{13}{10}$, y por consiguiente $D^2 : d^2 :: 10 : 13$. De donde sale $D : d :: \sqrt{10} : \sqrt{13}$. Fig.

292 Añadiremos la siguiente tabla comparativa del gasto natural por un orificio de 1 pulg. de diámetro con el gasto efectivo por un caño aditicio del mismo diámetro, con diferentes alturas de depósito. Los gastos efectivos que componen la tercera columna de esta tabla, son á los gastos naturales que componen la segunda columna como 13 es á 16 con poca diferencia.

Sirve esta tabla para hallar el gasto que hará un caño aditicio qualquiera con una altura dada de depósito.

Supongamos v, gr. que se nos pregunte ¿qual será en 1 minuto el gasto de un caño aditicio de 4 pulg. de diámetro, de 8 pulg. de longitud, con 25 pies de altura de depósito mas arriba de su orificio exterior? Para responder á esta pregunta buscaremos primero (283) el gasto natural por un orificio de 4 pulg. de diámetro, con 25 pies de altura de depósito, y sacarémos que este gasto es de 350400 pulg. cúbicas en 1 minuto. Disminuyendo este gasto en la razon de 16 á 13, saldrán 284773 pulg. cúbicas; estas serán el gasto efectivo que se busca.

Se le han dado 8 pulg. de largo al caño propues-

to,

Fig. to, porque como tiene 4 pulg. de diámetro, es preciso que tenga bastante longitud para que el agua siga sus paredes.

Altura constante del agua en el depósito mas arriba del orificio exterior del caño, expresada en pies.	Gasto natural, en 1 minuto, por un orificio de 1 pulgada de diámetro, expresado en pulgadas cúbicas.	Gasto efectivo en el mismo tiempo, por un caño cilíndrico de 1 pulg. de diámetro y 2 pulg. de largo, expresado tambien en pulg. cúbicas.
1 . . .	. . . 4381 . . .	. . . 3539
2 . . .	. . . 6196 . . .	. . . 5002
3 . . .	. . . 7589 . . .	. . . 6126
4 . . .	. . . 8763 . . .	. . . 7070
5 . . .	. . . 9797 . . .	. . . 7900
6 . . .	. . . 10732 . . .	. . . 8654
7 . . .	. . . 11592 . . .	. . . 9340
8 . . .	. . . 12392 . . .	. . . 9975
9 . . .	. . . 13144 . . .	. . . 10579
10 . . .	. . . 13855 . . .	. . . 11151
11 . . .	. . . 14530 . . .	. . . 11693
12 . . .	. . . 15180 . . .	. . . 12205
13 . . .	. . . 15797 . . .	. . . 12699
14 . . .	. . . 16393 . . .	. . . 13177
15 . . .	. . . 16968 . . .	. . . 13620

Sa-

Fig.

Satisfácense varias preguntas acerca de las evacuaciones del agua.

293 Pregunta I. *Se supone que un depósito se mantenga constantemente lleno á la altura de 11 pies 6 pulgadas mas arriba de un orificio de 16 lineas de diámetro; se pregunta ¿qué cantidad de agua dará este orificio en 8 minutos?*

Los gastos hechos en un mismo tiempo por diferentes orificios, con distintas alturas de depósitos, son unos con otros como los productos de dichas aberturas (267) por las raices de las alturas de los depósitos, ó como los productos de los quadrados de los diámetros de las aberturas por las raices de los depósitos. Pero (283) ya que en 1 minuto, una abertura de 12 lineas de diámetro, con 11 pies de altura de agua en el depósito, dá 8990 pulg. cúbicas de agua, es patente que con hacer esta proporcion, $144 \times \sqrt{(11 \text{ pies})} : 256 \times \sqrt{(11 \text{ pies } 6 \text{ pulg.})} :: 8990$ pulg. cúbicas de agua: un quarto término, que es 16341 pulg. cúbicas, y estas son el gasto que el orificio propuesto de 16 lineas de diámetro hará en 1 minuto. Multiplicando esta cantidad por 8, saldrán 130728 pulg. cúbicas, y estas serán el gasto que hace en 8 minutos.

294. Pregunta II. *Se supone que un depósito se mantiene constantemente lleno á la altura de 11 pies 6 pulg. mas arriba de un orificio que dá 245544 pulg. cúbicas de agua en 6 minutos; se pregunta ¿qual es el diámetro de dicho orificio?*

Ya que el orificio dá 245544 pulg. cúbicas en 6 minutos, dará 40924 pulg. cúbicas en 1 minuto. Luego si llamamos D su diámetro, expresado en lineas, sacarémos por la misma regla de arriba, 144 lineas quadradas $\times \sqrt{(11 \text{ pies})} : D^2 \times \sqrt{(11 \text{ pies } 6 \text{ pulg.})}$ ::

Fig. :: 8990 : 40924 ; y por consiguiente $D^2 = 144$ lineas quadradas $\times \frac{40924}{8990} \times \frac{\sqrt{180}}{\sqrt{138}} = 641,1$ lineas quadradas. Luego $D = 25,32$ lineas. Es, pues, el diámetro que se pedia de casi 2 pulg. $1\frac{1}{3}$ lineas.

295 Pregunta III. *Se supone que un depósito, el qual se mantiene constantemente lleno á la altura de 16 pies, haya dado 45678 pulg. cúbicas de agua por un orificio de 16 lineas de diámetro, por espacio de cierto tiempo; se pregunta ¿quanto tiempo duró la evacuacion.*

Buscarémos primero por el método de la pregunta I. el gasto que este orificio haria en 1 minuto; y hallarémos que el tal gasto = 19276 pulg. cúbicas. Repararémos despues que los gastos hechos por un mismo orificio, con una misma altura constante de depósito, son unos con otros como los tiempos que duran, y tendrémos la proporcion 19276 : 45678 :: 1 minuto : al tiempo que se pide, y hallarémos que es = 2 minutos y $22\frac{1}{5}$ segundos, con corta diferencia.

296 Pregunta IV. *Se supone que un depósito dé 40000 pulg. cúbicas de agua en 4 minutos por un orificio de 10 lineas de diámetro; se pregunta ¿qual será la altura del depósito?*

Ya que el depósito propuesto dá 40000 pulg. cúbicas de agua en 4 minutos, dará 10000 pulg. cúbicas de agua en 1 minuto. Si llamámos *b* la altura que se pide, expresada en pies, siempre tendremos, por la regla general (267), la proporcion $144 \times \sqrt{(11 \text{ pies})} : 100 \times \sqrt{b} :: 8990 : 10000$. Luego $b = 11$ pies $\times \frac{(144)^2 \times (100)^2}{(8990)^2} = 28,22$ pies = 28 pies 2 pulg. 8 lineas, con corta diferencia.

De la distribucion de las aguas.

105. 297 Sea *MNOP* la altura de un depósito que surten

ten las aguas de un aqueducto, de un manantial, de Fig.
un rio, &c. Se trata de hacerle á la pared *MNOP* 105.
muchas aberturas por las quales juntas salga tanta agua como recibe el depósito, y tales que los gastos particulares estén unos con otros en razon dada. Esta cuestion ocurre mucho en la práctica, y es de suma utilidad, particularmente quando se han de repartir entre las fuentes públicas ó particulares las aguas que se conducen á los depósitos hechos para este fin en distintos barrios de una Ciudad, desde los quales van despues por medio de los encañados á sus diferentes destinos.

298 La primera operacion que este punto requiere, consiste en determinar la cantidad de agua que dá y recibe el depósito en un tiempo determinado. Para esto se hará perpendicularmente á la pared *MNOP* un agugero de extension competente, por el qual se dexará salir el agua. Quando despues de los movimientos de oscilacion que se repararán al principio, la superficie del agua del depósito se mantuviere quieta y siempre en el mismo punto sin subir ni baxar, será señal cierta de que el agugero propuesto gasta cabalmente tanta agua como recibe el depósito. Entonces se cogerá con una cubeta el agua que diese en un tiempo conocido; y despues de medida puntualmente esta cantidad con una medida ó padrón muy seguro, se conocerá toda el agua que recibe y gasta el depósito. Siempre se podrá valuar en pulg. cúbicas. Es escusado, segun se echa de ver, afanarse por saber la area precisa del agugero, ni la altura del agua en el depósito.

299 Hecha esta operacion preliminar, y tapando el agugero que se hizo al principio, se repartirá el agua del depósito en varias porciones del modo siguiente.

Se determinarán las figuras que se les quiera dar

 á

Fig. á los orificios de distribucion, y sus distancias á la superficie del agua del depósito, que, segun suponemos, siempre corresponde al mismo punto de la pared $MNQP$, á lo menos en el discurso de cierto tiempo. Si llamamos Q el gasto total que puede hacer el depósito en un tiempo dado, cuyo gasto acábamos de determinar; y suponemos que los gastos parciales, correspondientes al mismo tiempo, sean unos con otros respectivamente como los números qualesquiera m, n, p &c. Tendremos estas proporciones:

$m+n+p$ &c. : m :: Q : al primer gasto parcial $=\frac{mQ}{m+n+p \text{ \&c.}}$

$m+n+p$ &c. : n :: Q : al segundo gasto parcial $=\frac{nQ}{m+n+p \text{ \&c.}}$

$m+n+p$ &c. : p :: Q : al tercer gasto parcial $=\frac{pQ}{m+n+p \text{ \&c.}}$

Luego la cuestion se reducirá á hallar la estension que debe tener cada orificio para gastar en un tiempo dado una cantidad dada de agua, con una altura dada de depósito; y esto se reduce á la cuestion de antes (294).

300 Supongamos, con la mira de hacer una aplicacion de este método, que el agua corra por los tres orificios circulares A, B, C, hechos en una pared delgada que dá lugar á la contraccion de la primera especie; que sus centros estén en una misma linea orizontal DE distante de la superficie QR del agua la cantidad dada CH; que el gasto total Q sea de 3600 pulg. cúbicas en 1 minuto, y que los gastos particulares de los orificios A, B, C en el mismo tiempo sean unos con otros como los números 6, 3, 1. Tendremos las proporciones

10 : 6 :: 3600 pulg.cúb. : gasto de A = 2160 pulg.cúb.
10 : 3 :: 3600 pulg.cúb. : gasto de B = 1080 pulg.cúb.
10 : 1 :: 3600 pulg.cúb. : gasto de C = 360 pulg.cúb.

Hecho esto, conociendo la altura CH que siempre se puede tomar sin recelo de error sustancial, por la

al-

altura media del agua mas arriba de los tres orificios, Fig. solo falta hallar los diámetros que han de tener los orificios *A*, *B*, *C* para que den las tres cantidades que acabamos de determinar. Supongamos v. gr. $CH =$ 6 pulg. y llamemos D, d, d' los diámetros de los tres orificios propuestos, expresados en lineas; fundándonos en lo dicho (283), esto es, que un orificio circular de 1 pulg. de diámetro, con 1 pie ó 12 pulg. de altura de depósito, dá 2722 pulg. cúbicas de agua en 1 minuto, sacarémos (267) las proporciones siguientes:

$$2722 : 2160 :: 1 \times 144 \text{ lin. quadr.} : DD \times \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$
$$2722 : 1080 :: 1 \times 144 \text{ lin. quadr.} : dd \times \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$
$$2722 : 360 :: 1 \times 144 \text{ lin. quadr.} : d'd' \times \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

las quales dan $D = 12{,}71$ lineas, $d = 9$ lineas, $d' = 5{,}19$ lineas.

301 Se hubieran hallado con igual facilidad las extensiones de los orificios, aun quando sus centros no hubieran estado en una misma linea orizontal. Todas las disposiciones de centros se pueden igualmente admitir en la teórica, siendo siempre el mismo nivel del agua. Pero en la práctica se debe considerar que como el agua provisional que surte el depósito, mengua en los tiempos secos, la superficie del agua podrá baxar, v. gr. á *DE* ó *FG*; entonces los orificios *A*, *B*, *C* no darán agua en la razon que es menester. El orificio *C* no dará ninguna, quando el nivel del agua estuviere en *FG*. El mismo inconveniente se experimenta á otro respecto, con los tres orificios *V*, *T*, *S*. Quando el nivel del agua está en *IX*, el orificio *S* dá mas á proporcion que los otros dos. Dispónganse como se quisiere los orificios; quando son muy desiguales, siempre habrá tiempos en que los unos darán mas á proporcion que los otros.

302 De aquí han inferido algunos Escritores que se habian de desechar los orificios circulares, y que

Fig. en su lugar se habian de substituir orificios rectangulares verticales todos de igual altura, estando todas sus bases en una misma linea orizontal. En virtud de esto suba ó baxe el nivel del agua, los gastos siempre se mantendrán unos respecto de otros en la misma razon. Sin embargo no ha prevalecido este pensamiento. Es dificultosísimo hacer con la exâctitud que corresponde los orificios rectangulares; dán lugar á mucho rozamiento, mayormente quando son pequeños; suelen taparlos á menudo el légamo, y demas porquerías que el agua lleva consigo. Por esto han prevalecido los orificios circulares, cuya construccion es facil, y el uso acomodado.

303 Son fáciles de evitar en gran parte los inconvenientes que, segun hemos visto, tienen estas aberturas. Para lograrlo, se han de poner todos los centros en una misma linea orizontal, y dividir una abertura gande en otras menores, que juntas dén la misma cantidad de agua, y la suministren á un mismo caño. Dando con esto la misma extension, al poco mas ó menos, á todas las aberturas, no solo se conseguirá que sus gastos guarden unos con otros, con corta diferencia, la misma razon, mas tambien se logrará que las aberturas grandes no dén á proporcion mas que las pequeñas; y esto no dexaría de suceder (275) si las aberturas fuesen muy desiguales.

Instrumento para medir la velocidad de las aguas corrientes.

304 De quantos instrumentos se han inventado hasta el dia de hoy para medir la velocidad de las aguas corrientes, uno de los mejores es, segun hombres de mucha experiencia, el *tubo recurvo de Pitot.*
106. Compónese este instrumento de un tubo de vidrio *AB*, que tiene en *C* un recodo, y se mete verticalmen-

mente en una corriente. La altura *AM* á la qual sube el agua en el tubo, es la que proviene de la velocidad con que camina la corriente en *A*. Fig. 106.

Porque manteniéndose invariable la altura *CM*, es evidente que la presion del agua *MC* hace equilibrio con la fuerza que obra para que el agua suba en la direccion *ACM*, y que por consiguiente la velocidad del punto *A* es la misma (253) que si el agua en el mismo parage hubiese caido de la altura *MC*. Con meter el tubo mas ó menos dentro del agua, se determinan las alturas que corresponden á las velocidades de los diferentes puntos de la corriente.

Quando se hubiere de hacer uso de este intrumento se pondrá cuidado en colocarle uniformemente en situacion vertical, y muy de cara á la corriente para que reciba todo su impulso. Y como el movimiento del agua, por mas regular que sea, padece momentaneas alteraciones, requiere paciencia y juicio el determinar la cantidad precisa de su elevacion.

Para que el instrumento se mantenga inmoble en 107. la situacion vertical, y direccion correspondiente, se le mete por los taladros hechos en dos fuertes travesaños orizontales de madera, afianzados uno con otro por medio de dos pilares verticales asegurados en sus bases. En los taladros se ajusta y afirma el instrumento con unas cuñitas de madera. El tubo recurvo está encajonado hasta la mitad de su grueso en un prisma de madera, en el qual están señaladas á cada lado del tubo las divisiones de las alturas en pies, pulgadas y lineas; por cuyo medio siempre se sabe la cantidad de la inmersion, y la altura á que llega el agua en el tubo. Pero la operacion es muy dificultosa de executar con la exâctitud que corresponde en una corriente muy rápida. Hay quien intentó hacerla muchas veces á la profundidad de 4 pies, sin poderlo conseguir jamas, porque el agua daba con tal ím-

 pe-

Fig. petu en el instrumento, que á pesar del peso y firmeza de su pie, y de asegurarle con los brazos, bamboleaba tanto por los embates del agua, que no fué posible se estuviese quieto quanto se necesitaba para una operacion hecha aprisa, de manera que á veces se quiebra al último el tubo. Esto manifiesta lo poco que hay que fiar de los experimentos hechos en rios caudalosos, desde dentro de bateles ó barcos que siempre se están meneando.

De algunos instrumentos y máquinas.

305 De algunos puntos que hemos ventilado, y en particular de lo que dexamos sentado acerca del equilibrio del ayre, se hacen varias aplicaciones muy provechosas para beneficio de los hombres.

De la Máquina Pneumática.

108. 306 La figura representa la máquina pneumática. Compónese 1.° de un cilindro hueco ó cuerpo de bomba *AB*. 2.° de un émbolo cuyo mango remata en forma de estribo *Y* para empujarle ácia abaxo con el pie, y lleva un puño *Z* para empujarle ácia arriba con la mano. 3.° de una llave *DE*. 4.° de una platina ó platillo *FG* cubierta con un cuero mojado, sobre el qual se coloca el recipiente ó campana de vidrio *H*. 5.° de un pie *MN* que unido con la pieza *IK* por medio de los brazos *IM*, *KN* sirve para afianzar el cuerpo de bomba.

Está hecha la llave *DE* con tal artificio, que despues de puesta se le puede dar la situacion que conviene para mantener la comunicacion entre el recipiente y el cilindro, y empujando entonces el émbolo ácia abaxo, se saca ayre del recipiente. Pero como este no se puede sacar todo de un golpe, y para sacar mas es indispensable empujar otra vez el émbolo ácia abaxo, es menester que se le pueda empujar primero ácia arriba, sin que vuelva á introducirse en el re-

recipiente el ayre que se sacó. Para este fin se dá un quarto de vuelta á la llave *DE*, con lo que se cierra la comunicacion entre el mismo cilindro y el recipiente, y se abre otra comunicacion entre el mismo cilindro y el ayre exterior, ácia el qual el émbolo arroja, quando se le empuja ácia arriba, el ayre que contenia y se habia sacado del recipiente. Finalmente, dando otro quarto de vuelta á la llave, se pone la máquina en la situacion que conviene para sacar mas ayre del recipiente. Fig.

ABCD representa el cuerpo de la llave. En *E* hay un agugero que la atraviesa, y por él tiene comunicacion el cilindro, siempre que se quiere, con el recipiente. En dando á la llave un quarto de vuelta se cierra esta comunicacion, y avocándose entonces el agugero *F* de la llave en el cilindro, si se empuja ácia arriba el émbolo, este impele el ayre que contiene por el conducto *FGH* cuyo extremo *H* vá á parar al ayre exterior. 109.

307 Sentado esto, lo que acerca de esta máquina hemos de averiguar, es la dilatacion que en ella padece el ayre; para lo qual llamemos *A* la suma de las cabidas del recipiente, y de la parte superior del cuerpo de bomba, que queda vacía quando se sube el émbolo; *n*, el número de veces que obra el émbolo; $\frac{m}{1}$, la razon entre la densidad del ayre exterior, y la del ayre interior rarefacto despues que el émbolo ha obrado *n* veces. Supongamos que en el primer instante se suba el émbolo, estando abierta la llave ácia la parte de afuera, y cerrada por la parte del recipiente, y que despues se plante el recipiente encima de la platina. Es evidente que en el mismo instante la densidad del ayre que ocupa el espacio *A* es la misma que la del ayre exterior, la llamarémos *D*. Si despues cerramos la llave por la parte de afuera,

la

Fig. 109. la abrimos por la parte del recipiente, y baxamos el émbolo; el ayre que ocupa el espacio A se dilatará por su virtud elástica, y se desparramará uniformemente en el espacio B. Así, la densidad que tendrá en el espacio B, será á la densidad que tenia en el espacio A, recíprocamente como A es á B; porque siendo una misma la masa, la densidad es recíprocamente (35) proporcional al volumen. Por consiguiente, si hacemos esta proporcion $B : A :: D :$ á un quarto término; este quarto término $D \times \frac{A}{B}$ expresará la densidad del ayre interior despues que el émbolo hubiere obrado una vez. Asimismo, si despues de cerrada la llave por la parte del recipiente, abriéndola por la parte de afuera, se sube el émbolo, se cierra la llave por la parte de afuera, se la abre por la parte del recipiente, y se vuelve á baxar el émbolo; el ayre que ocupa el espacio A, y cuya densidad es $D \times \frac{A}{B}$, se desparramará en el espacio B; por manera que si hacemos esta proporcion $B : A :: D \times \frac{A}{B}$: á un quarto término, este quarto término $D \times \frac{A^2}{B^2}$ expresará la densidad del ayre interior despues que el émbolo hubiere obrado segunda vez. Discurriendo por el mismo término, echarémos de ver que la densidad del ayre interior despues que el émbolo hubiere obrado tres veces, será $D \times \frac{A^3}{B^3}$; que quando el émbolo hubiere obrado n veces la densidad será $D \times \frac{A^n}{B^n}$. Luego tendremos por el supuesto $D : D \times \frac{A^n}{B^n} :: m : 1$; de donde se saca $m \times A^n = B^n$, y por consiguiente $L.(m \times A^n) = L.B^n$ que dá (II. 427 y 428) $L.m + nL.A = nL.B$.

Luego en conociendo tres de las quatro cantida-

des

des m, n, A, B que hay en esta equacion, se hallará la quarta. Fig.

308 Cuestion I. *Dadas las cabidas* A, B, *y la razon* m *entre la densidad del ayre exterior, y la del ayre interior; determinar el número* n *de veces que obró el émbolo.*

De la equacion antecedente se saca estotra $n = \frac{L.m}{L.B - L.A}$ que resuelve la cuestion. Sea v. gr. $A = 5$; $B = 7$, $m = 4$; sacarémos $n = \frac{60206}{14613} = 4\frac{1}{8}$.

309 Cuestion II. *Dadas las cabidas* A *y* B, *y el número* n *de veces que obró el émbolo; hallar la razon* m *entre la densidad del ayre exterior, y la del ayre interior.*

Esta cuestion se resuelve por la equacion $L.m = n(L.B - L.A)$. Sea v. gr. $A = 5$, $B = 7$, $n = 10$, sacarémos $L.m = 1,46128$, y por lo mismo $m = 29$, con corta diferencia.

310 Cuestion III. *Dada la razon* m *entre la densidad del ayre exterior y la del ayre interior, el número* n *de veces que obró el émbolo, la cabida* A; *hallar la cabida* B.

Resuelve esta cuestion la equacion $L.B = \frac{L.m + nL.A}{n}$ Sea, v. gr. $m = 29$; $n = 6$; $A = 5$, sacarémos $L.B = 0,94270$, y por consiguiente $B = 9$, con corta diferencia.

311 Cuestion IV. *Dada la razon* m *entre la densidad del ayre exterior y la del ayre interior, el número* n *de veces que obró el émbolo, la cabida* B; *hallar la cabida* A.

La equacion $L.A = \frac{nL.B - L.m}{n}$ resolverá esta cuestion. Supongamos v. gr. que sea $m = 29$, $n = 9$, $B = 7$, sacarémos $L.A = 0,68261$, y por consiguiente $A = 5$, con corta diferencia.

Fig.

Del Barómetro.

110\. 312 Sirve este instrumento, conforme dexamos dicho (221), para medir el peso del ayre, ó por mejor decir los varios estados de compresion de la atmósfera. Este instrumento no es otra cosa que el tubo de Torricelli, aplicado á una tabla vertical dividida en pulgadas, empezando desde la superficie *MN* del azogue que está en el cubillo *MCDN*, y subdividida en líneas ó medias líneas en su parte superior. Estas graduaciones manifiestan lo que sube el azogue, ó las variaciones que sobrevienen en la presion de la atmósfera.

313 Una vez que la elasticidad ó fuerza expansiva del ayre es igual á la fuerza que le comprime (226), es patente que si el resorte de este fluido fuere contrahido por solo su peso, la una ó la otra fuerza indistintamente sostendrá el mercurio á la misma altura dentro del tubo *AB*. De aquí proviene el que en un quarto muy cerrado, ó debaxo de una campana grande de vidrio, puesta encima de una mesa orizontal, el azogue se mantiene á la misma altura en el barómetro, que si estuviera al ayre libre ó al raso. Esta suspension es efecto del ayre encerrado en el quarto ó debaxo de la campana, que se hallaba contrahido por la presion del ayre exterior, antes que se cortase su comunicacion recíproca.

314 El tubo de un barómetro ha de tener un grueso determinado, pongo por caso, dos ó tres líneas de diámetro interior, á fin de que el mercurio que contiene no experimente sobrado la impresion del calor que pudiera dilatarle. Se experimenta con freqüencia que no concuerdan las alturas de dos barómetros que están en un mismo sitio, porque el efecto del calor en el mercurio es mas ó menos notable, con-

conforme sea el tubo mas ó menos angosto. A esta causa pueden agregarse otras, qual sería alguna leve desigualdad entre las gravedades específicas de los dos mercurios, la dificultad en purgarlos igualmente de ayre, las diferentes asperidades de las paredes de los tubos, el vacío mas ó menos perfecto en sus partes superiores. Fig.

315 Si por inadvertencia ú otra causa quedare ayre encerrado en el espacio *EB*, sería facil de determinar la relacion entre la presion de la atmósfera, la altura *AB* del tubo respecto del nivel *MN* del mercurio en el cubillo, la altura del espacio que el ayre encerrado ocupaba naturalmente en el tubo, y la altura á la qual se mantendrá el mercurio mas arriba del nivel *MN*. Porque sea *BH* el espacio que el ayre encerrado en *BE* ocuparía en su estado natural, esto es, si el extremo superior *B* del tubo estuviera abierto, y se comunicara con el ayre exterior. La virtud elástica de este ayre *BH* hace fuerza para dilatarle ácia qualesquiera direcciones. Pero como encuentra un obstáculo en el extremo *B* que está cerrado, rechaza de arriba abáxo la columna *AE* de mercurio, y es evidente que esta columna se mantendrá á la altura donde hubiere subido, quando la suma compuesta de la fuerza elástica del ayre dilatado en *BE*, y del peso de la misma columna *AE* de mercurio fuere igual con la presion de la atmósfera, esto es, con el peso de una columna de mercurio, cuya altura llamarémos b. Ahora bien; como la fuerza elástica del ayre natural *BH* siempre es igual (226) á la fuerza comprimente, la qual en nuestro caso es el peso de la atmósfera, es evidente (228) que la fuerza elástica del ayre dilatado *BE* será $\frac{b \times BH}{BE}$. Tendremos, pues, la equacion $\frac{b \times BH}{BE} + AE = b$, ó $\frac{b \times BH}{AB - AE} + AE = b$, en la qual vá cifrada la relacion expresada,

Fig. da, y manifiesta que en conociendo tres de las quatro lineas *b*, *BH*, *AB*, *AE*, se conocerá la quarta.

316 Supongamos que tenga el barómetro toda la perfeccion que se le puede dar. Qualquiera se hará cargo de que quanto mas baxo fuere un sitio, tanto mayor será la presion de la atmósfera, y mas arriba subirá por lo mismo el mercurio. Esto es cabalmente lo que pasa quando no hay causa que lo estorbe. Se sabe que en un mismo sitio se experimentan muchas variaciones en la altura del mercurio, por razon de los diferentes estados de la atmósfera. Por lo comun el mercurio sube quando el tiempo es bueno, constante, seco, y sin ayres; al contrario, baxa quando el tiempo es vario, lluvioso, borrascoso, y soplan ayres fuertes, y está el ayre lleno de vapores. Los mayores ascensos y descensos del barómetro se experimentan en invierno, y estas variaciones son en general mas notables en los paises frios que en los calurosos. Si quando hace buen tiempo baxare el mercurio, será señal de que lloverá, ó hará ayre; por el contrario, si estando el tiempo lluvioso subiere el mercurio, será señal de que se pondrá el tiempo bueno. Quando el mercurio baxa en la estacion del calor, pronostica truenos; quando hace frio, y sube el mercurio, anuncia hielos; y su descenso quando hiela, pronostica que cesarán los hielos &c. Estos son los hechos generales que la observacion atestigua, y todo el mundo conoce; pero padecen muchas excepciones, y en algunos casos se experimentan efectos contrarios á los que pronostica el barómetro.

317 Puede servir alguna vez este instrumento para averiguar la diferencia de nivel entre muchos puntos de la superficie de la tierra.

Porque como una misma masa de ayre se condensa en razon del peso que la comprime (229), ó lo que es lo propio, ya que siendo igual el volumen, la den-

densidad del ayre crece como el peso comprimente; Fig.
si nos figuramos la altura de la atmósfera dividida en una infinidad de rebanadas de un mismo grueso, es evidente (230) que siendo uno mismo el temple, las densidades de dichas rebanadas forman una progresion geométrica, á la qual corresponde la progresion arismética de las alturas. Las elevaciones del mercurio en el barómetro pueden representar los términos de la progresion geométrica, por ser el peso de la columna de mercurio igual ó proporcional, siendo unas mismas las circunstancias, á la presion de la atmósfera, y los logaritmos de las tablas pueden representar los términos de la progresion arismética. Por consiguiente, la diferencia de los dos logaritmos de las dos elevaciones del mercurio en dos sitios propuestos, será proporcional á la diferencia de nivel entre los mismos dos sitios. Luego si conociésemos de antemano por medio de una medicion inmediata, lo que el uno de dos sitios es mas alto que otro, y las alturas del mercurio en ambos, se determinará por medio de una proporcion la diferencia de nivel entre otros dos sitios. Comparando despues muchos resultados de esta especie con las determinaciones geométricas, se formará juicio sobre si este método se puede practicar con seguridad.

Del Termómetro.

318 Es el *termómetro* un instrumento de vidrio, donde se encierra un licor elástico, cuyo licor, condensándose con el frio, ó dilatándose con el calor, manifiesta las variaciones que ocurren en el temple de la atmósfera.

319 Es patente que no puede señalar con puntualidad el termómetro estas variaciones, á no ser que se cuenten desde un término fixo y constante los grados

Fig. dos de frio y calor. *Reaumur* toma por principio fixo y constante de esta graduacion la congelacion del agua, pero no la congelacion natural; porque se ha experimentado con los termómetros comunes que los hielos naturales no son todos igualmente frios; tomó la congelacion artificial que se hace con hielo y sales. Para precaver las equivocaciones que podria ocasionar el hielo natural mas ó menos frio que sirve para esta operacion, el citado autor hace la congelacion en tiempo que no tiene el ayre disposicion alguna para helar el agua, y toma por término fixo el instante en que la primera superficie del agua empieza á helarse artificialmente. Esta primera accion del frio no puede menos de ser siempre bastante igual, y no pueden sobrevenir desigualdades hasta despues, por razon de una aceleracion mayor ó menor.

820. Sentado esto, Reaumur gradúa el termómetro de modo que los grados iguales corresponden no á partes iguales de la longitud del tubo, sino á partes iguales del volumen del licor. Para este fin se vale de medidas muy cabales, unas chicas, otras mayores, en las quales caben 25, ó 50, ó 100 veces cabales las chicas, para abreviar; se vale para esta operacion preliminar antes de agua comun que de espíritu de vino, por recelo de que este último licor se caliente y mude de volumen en el discurso de la operacion; echa un número limitado de partes iguales de agua, pongo por caso, 1000 partes, hasta el punto donde se quiere señalar el término de la congelacion, y que está por lo regular á la tercera parte de la altura del tubo, contando desde la bola; prosigue echando despues mas partes iguales, y determina los espacios que cogen en el tubo. Despues de concluida por este término la graduacion, arroja el agua; y secando y limpiando con todo cuidado el instrumento, mete la bola dentro del hielo artificial;

100

101

103

104

109

108

110



cial; en lugar del agua substituye espíritu de vino lo Fig.
que es menester no mas para llegar cabalmente al punto señalado para la congelacion; sacando despues el termómetro de entre el hielo, y sellando el extremo del tubo, el espíritu de vino señala con su contraccion ó dilatacion, los grados de temple mas arriba ó mas abaxo de la congelacion artificial.

321 Es importantísimo conocer perfectamente la calidad del espíritu de vino que se gasta. Porque este licor es una mezcla de flegma y agua, y de un aceyte etereo, sutil é inflamable; y es mas ó menos dilatable, segun está mas ó menos rectificado, ó conforme sea mayor ó menor la porcion de aceyte respecto de la del agua. El mejor espíritu de vino que pudo hallar Reaumur era tal que si con la congelacion artificial del agua era 400, llegaba á 435 con el calor del agua quando cuece, esta es la razon de 80 á 87. Todo espíritu de vino es bueno para construir un termómetro, con tal que se averigüe su dilatabilidad, y se señale en la tabla misma del instrumento.

322 Convienen todos los físicos en que es muy bueno el termómetro de Reaumur para las observaciones metereológicas; pero no sirve para señalar grados grandes de calor, como los de los metales derretidos, y tambien el del agua cociendo; porque el espíritu de vino muy calentado, ó no sube mas aunque suba de punto el calor, ó para en cocer. A mas de esto, el licor pierde con el tiempo su virtud expansiva, y se pega al tubo.

323 Por estos motivos los mas de los físicos dan la preferencia al termómetro de mercurio, porque le asiste á este fluido la circunstancia de mantenerse siempre puro, y guardar su virtud expansiva, por mas añejo que sea; la de aguantar un calor muy grande sin cocer, y de no helarse como no llegue el frio á un grado muy excesivo. El termóme-

Fig. tro de esta especie es el de *Delisle* y de *Fahrenheit*.

324 En el termómetro de Fahrenheit el tubo es muy delgado, y remata, no en bola, sino en una botella cilíndrica de cabida correspondiente. Segun *Boerhaave*, que hizo muchísimo uso de este instrumento en sus Experimentos Químicos, si concebimos la masa total del mercurio que contiene, dividida en 10782 partes, el mercurio se dilata 600 desde el mayor frio determinado por Fahrenheit hasta llegar á la ebulicion, señalando cero en el punto del frio mayor. Este frio es efecto de una congelacion artificial hecha con una mezcla de sal amoníaca ó sal marina, ó de nieve ó hielo molido que se pone al rededor de la bola. El mercurio se dilata 32 partes desde el término cero hasta el de la congelacion del agua, y 212 partes desde cero hasta el calor del agua hirviendo. Los grados superiores sirven para medir el calor de los aceytes quando hierven, del estaño, y del plomo &c. derretidos.

325 Este termómetro es en general de una construccion dificil, larga y costosa; pero los hacen mas chicos, cuya graduacion no se lleva tan adelante, y son muy á propósito para las observaciones metereológicas. Quando se quieren construir, se llena de mercurio la bola, y una corta parte del tubo hasta una altura tal que metiendo la bola en la nieve ó el hielo que se derrite, quede debaxo del punto donde llega el mercurio, que se señalará 32, bastante espacio para señalar las divisiones hasta cero. Métase despues la bola en agua hirviendo; señálese 212 en el punto donde el mercurio se detuviere; divídase el espacio entre 212 y 32 en 180 partes ó grados, y prosígase la division en esta proporcion. Como puede suceder que el tubo no sea perfectamente cilíndrico por la parte de adentro, para precaver las equivocaciones que de aquí podrian resultar en la gradua-

cion,

cion, se introduce en el tubo un cilindro chico de mercurio, haciéndole andar succesivamente toda la longitud del tubo, y señalando al mismo tiempo los límites en que cupiere. Por este medio saldrán divisiones iguales, y se podrá señalar la graduacion con toda la puntualidad posible. Fig.

326 La graduacion de Delisle es distinta. Supone que el volumen del mercurio, estando metido el termómetro en el agua cociendo, es de 1000 ó 10000 partes, y en partes de esta especie señala mas arriba y mas abaxo de este punto fixo todos los grados de calor correspondientes á todos los grados posibles de dilatacion y condensacion. Estas divisiones están señaladas contra el uso comun con números que crecen á proporcion de lo que mengua el calor.

327 Todos estos instrumentos tienen un defecto capital é irremediable. El vidrio experimenta variaciones por razon del calor y del frio; se dilata y condensa mas ó menos, segun es mas ó menos grueso; esto altera la marcha natural del espíritu de vino ó del mercurio. Hay todavía mas; los grados iguales de un mismo termómetro señalan dilataciones iguales del licor, pero no podemos afirmar que señalen grados iguales de calor. Porque puede suceder que el calor no siga en sus aumentos la misma razon que las dilataciones del licor. Es muy posible que al paso que crece igualmente el calor, halle mas ó menos dificultad para dilatar el mismo licor. La consecuencia que se puede sacar quando se vé que sube el licor en el termómetro, es que el calor crece; pero no basta esto para determinar la ley que sigue en sus incrementos.

De las Bombas.

328 Son las *bombas* unas máquinas que sirven para levantar ó hacer subir el agua, de cuyo efecto

Fig. la causa principal es la presion de la atmósfera. Las hay de tres especies; es á saber, la *bomba atraente*, la *bomba impelente*, y la *bomba* que es á un tiempo *atraente* é *impelente*.

329 La *bomba atraente* se compone de dos tubos verticales *AKBC*, *CBQD* que se unen uno con otro en *CB*. El primero que se mete dentro del agua *MN*, se llama *tubo de atraccion*, el segundo se llama *cuerpo de bomba*. En el lugar donde se unen estos dos tubos, se suele colocar la *válvula* ó portezuela *E* que se abre de abaxo arriba. Digo que *se suele colocar*, porque esta válvula se pone á veces mas abaxo; y esta es una circunstancia de poco momento por ahora. Por dentro del cuerpo de bomba sube y baxa alternadamente un émbolo cuya espiga *Z* se mueve por medio de una palanca ó de otro modo qualquiera. Lleva la cabeza de este émbolo en la direccion de su exe, un agugero *t* tapado por la parte superior con una válvula *F* que se abre de abaxo arriba. Anda, quando se le pone en movimiento un espacio determinado, cuya altura supongo que sea *IT*; quiero decir, que quando el émbolo está baxo, su base inferior está en el plano orizontal *IH*; y quando está levantado, la misma base está en el plano orizontal *TS*.

330 El efecto de esta máquina es muy facil de entender. Supongamos que en el primer instante la base del émbolo esté en *IH*, y que el ayre contenido en la bomba sea el mismo que el ayre exterior. Las dos válvulas *E* y *F* están cerradas. Levántese ahora el émbolo hasta *TS*; la válvula *F* se mantiene cerrada por su peso, y por la presion con que en ella obra la atmósfera; el ayre que al principio ocupaba el espacio *ACHIBK* se dilata en fuerza de su elasticidad, abre la válvula *E*, y se desparrama en el espacio *ACSTBK*; al mismo tiempo la presion con que

que obra la atmósfera en la superficie *MN* del depósito impele el agua, y la obliga á subir un trecho *Aa* por dentro del tubo de atraccion, donde dicha agua halla un ayre mas dilatado, y por lo mismo menos resistente que el ayre exterior. Báxese el émbolo, la válvula *F* se abrirá en fuerza de la compresion del ayre contenido en la bomba, entre la superficie del agua y la base inferior del émbolo; la válvula *E* se cerrará por su peso y por la presion del ayre superior; y el ayre que ocupa el espacio *CHIB* se pondrá tan denso como el ayre exterior. Volviendo á levantar el émbolo, la válvula *F* se cierra, el ayre ya rarefacto y contenido en el espacio *aCBk* se dilata y abre la válvula *E*; por manera que este ayre y el que quedaba en el espacio *CHIB*, se desparraman ahora en el espacio *aCSTBk*. Por consiguiente el agua debe subir todavía cierta cantidad *aa'* por el tubo de atraccion, en virtud de la presion de la atmósfera en la superficie del depósito. Prosiguiendo del mismo modo el movimiento del émbolo, el agua proseguirá subiendo; llegará por fin á tocar el émbolo; pasará por el agugero *t*, y subirá mas arriba del émbolo. Entonces no habrá mas ayre en la bomba debaxo del émbolo, el qual dará, y volverá á dar en el agua; los movimientos de las válvulas serán los mismos que antes, y el agua irá á salir por un desaguadero *O*. Fig. 111.

331 Es de reparar que aun quando se pudiera conseguir dexar de todo punto sin ayre lo interior de la bomba, la altura *LM* entre la base inferior *IH* del émbolo y la superficie *MN* del depósito no podria ser quando mas que de 32 pies, pues de lo contrario (223) el agua no podria llegar á *IH*, ni mas arriba tampoco con mas razon. Pero en la práctica se le dán menos de 32 pies al espacio *LM*, porque nunca se puede quitar todo el ayre, y por otra

 par-

Fig. parte el peso de la válvula inferior *E* se opone á la expulsion del ayre interior, ó á la ascension del agua, cuyo obstáculo solo puede vencerle la presion de la atmósfera.

En todo lo dicho aquí caminamos en el supuesto de que la presion de la atmósfera puede formar equilibrio con una columna de agua de 32 pies de altura, ó que el barómetro, en el sitio donde está la bomba, se mantenga á la altura de unas 28 pulgadas; pero si el barómetro se mantuviera mas ó menos alto, se debería rectificar la altura de la columna propuesta, conforme á lo dicho (212), y substituir su valor cabal donde hemos dicho 32 pies.

332 En el supuesto de que esté bien hecha la máquina, la evacuacion mas ó menos completa del ayre interior pende de la posicion mas ó menos ventajosa de la válvula *E*. Es uso comun colocar esta válvula en *AK* algo mas abaxo del nivel *MN* del depósito; pero es mas comun todavía colocarla donde el tubo de contraccion se une con el cuerpo de bomba, conforme se vé en la figura. Veamos qual de estas dos posiciones es la mejor. En virtud de lo que averiguarémos acerca de estos dos casos, se podrá formar juicio de las posiciones intermedias.

333 Suponemos primero la válvula *E* en *AK*; y para mayor desembarazo no atenderemos á su peso. Quando, en los primeros instantes, se levanta el émbolo desde *I* á *T*, el agua del depósito, impelida de la presion de la atmósfera, sube con facilidad por el tubo de atraccion; pero si la altura *LM*, bien que no llegue á 32 pies, es de alguna consideracion, podrá suceder que llegada el agua á cierta altura *VA* en el tubo de atraccion, y el émbolo á su mayor altura *TS*, podrá suceder, digo, que la fuerza elástica del ayre contenido en el espacio *VCSTBP*, junta con el peso de la columna de agua *VK*, contrabalan-

lance la presion de la atmósfera. Entonces no subirá el agua, aunque prosiga obrando el émbolo. Con efecto, quando el émbolo está en IH, el ayre contenido en el espacio $VCHIBP$ es el mismo que el ayre exterior, y quando se levanta el émbolo á TS, dicho ayre se desparrama en el espacio $VCSTBP$. Así, si llamamos b la altura de una columna de agua equivalente á la presion de la atmósfera, ó lo que es lo propio (226), á la fuerza elástica del ayre natural, se echa de ver (228) que la fuerza elástica del ayre desparramado en el espacio $VCSTBP$ es igual al peso de una columna de agua cuya altura es $b \times \frac{VCHIBP}{VCSTBP}$. Añadiendo á esta altura la altura AV del agua contenida en el tubo de atraccion, la suma debe ser igual á b, para que el agua se detenga en VP. Luego la equacion de este equilibrio es $b = AV + b \times \frac{VCHIBP}{VCSTBP}$. Fig. 111.

Sea el radio del cuerpo de bomba .... $= R$
El del tubo de atraccion .... $= r$
La razon entre la circunferencia y el diámetro .... $= P'$
AC .... $= a$
CH .... $= n$
El movimiento IT del émbolo .... $= p$
AV .... $= x$.

Es evidente que el cilindro $VB = P'r^2(a-x)$; el cilindro $CH = P'R^2n$; el cilindro $CS = P'R^2(p+n)$; y que por consiguiente el sólido $VCHIBP = P'R^2(a-x) + P'R^2n$; el sólido $VCSTBP = P'r^2(a-x)+P'R^2(p+n)$. Luego la equacion de poco ha se tranforma en $b = x + \frac{b[r^2(a-x)+R^2n]}{r^2(a-x)+R^2(p+n)}$, de donde sacarémos con hacer $\frac{R^2}{r^2} = k$, $x = \frac{a+k(p+n) \pm \sqrt{[(a+k(p+n))^2 - 4khp]}}{2}$.

Siempre que el valor de x fuese real y menor

 que

Fig. que a, el agua se detendrá con efecto en el tubo de atraccion, conforme lo hemos supuesto en el cálculo. Luego no proseguirá subiendo sino quando será absurdo suponer que se detiene, esto es quando las raices de nuestra equacion fueren imaginarias. Pero estas raices no pueden ser imaginarias, á no ser que sea $4kbp > (a+k(p+n))^2$. Así, quando esta condicion se verificare, el agua subirá; si no, no subirá de ningun modo. Apliquemos esta doctrina á algunos casos.

I. Sea $b = 32$ pies; $k = 1$, ó el radio del tubo de atraccion igual al radio del cuerpo de bomba; $a = 20$ pies; $n = 2$ pies; $p = 2$ pies. Tendremos $4 \times 32 \times 2 < (20+4)^2$. Luego el agua se detendrá, y la bomba se deberá desechar.

II. Sea $b = 32$ pies, $k = 4$, $a = 25$ pies, $n = 0$, $p = 2$ pies. Tendremos $4 \times 32 \times 4 \times 2 < (25+8)^2$. Luego tambien se detendrá el agua, y la bomba se deberá desechar. Pero si quedándose todo del mismo modo, hacemos $k = 6$ el agua subirá, y la bomba será de recibo.

334 Por el mismo método se averiguará si suponiendo el agua llegada al cuerpo de bomba, se detendrá entre los puntos C ó I. Para aplicar la fórmula precedente á este caso no habrá mas que hacer $k = 1$.

335 Manifiestan unánimes todos estos cálculos que colocando la válvula E en AK, la altura del émbolo mas arriba del agua del depósito, siempre deberá ser mucho menor que 32 pies, á no ser que se le dé mucho campo al émbolo, ó se haga el diámetro del tubo de atraccion muy chico en comparacion del radio del cuerpo de bomba. Estos dos medios padecen algunos inconvenientes. El último particularmente puede disminuir el efecto de la bomba, siendo causa de que gaste en valde el agente parte de su velocidad. Porque la velocidad del agente se debe arreglar de tal modo que quando la máquina anda

bien,

bien, suba tanta agua cabalmente por el tubo de atraccion quanta levanta el émbolo subiendo por el cuerpo de bomba; por manera que nunca quede vacío ninguno entre la cabeza del émbolo y el agua que le sigue. Fig. 111.

336 Supongamos ahora que la válvula *E* esté donde se juntan los dos tubos. Parece á primera vista que esto proporciona una evacuacion casi completa del ayre interior. Porque haciendo que baxe el émbolo lo mas cerca que se pueda de *CB*, solo quedará ayre en el espacio *CHIB*, y en el huequecito *t*. Por consiguiente la altura *LM* podrá ser entonces casi de 32 pies. Pero esto supone que las válvulas ajusten bien con las paredes de los agugeros que deben tapar, y que no dén, quando es menester, ninguna salida ni al ayre ni al agua. Tanta perfeccion casi nunca se halla en la práctica. Por otra parte, aun quando las válvulas fuesen perfectamente fieles, si la máquina estuviere algun tiempo sin uso, los cueros se secan, y las válvulas se malean. Este inconveniente que alcanza á la válvula *E*, quando está en *CB*, no se experimenta quando se la coloca en *AK* donde se mantiene siempre sumergida en el agua. Sin embargo, todo bien mirado, mas vale colocar la válvula *E* en *CB* que no en *AK*. Pero siempre se debe hacer *LM* de tal extension que no llegue sensiblemente á los 32 pies.

337 Despues de tomadas todas las precauciones correspondientes para que el agua suba por dentro de la bomba, pase por el agugero *t*, y vaya á salir por *O*, busquemos la expresion de la fuerza que se debe aplicar al émbolo quando sube.

Supongamos que estando en exercicio la máquina, y llegada el agua á su altura máxima *QD* en el cuerpo de bomba, el émbolo esté en el primer instante en *IH*, término mas baxo de su carrera. Es patente que en el mismo instante sostiene 1.º el peso de

la

Fig. 111. la columna de agua *IHDQ*. 2.° Considerando como uniforme la densidad de la atmósfera en toda la altura que corresponde á la bomba, se echa de ver (211) que la presion del ayre en *QD* puede equilibrarse con la presion del ayre en *MN*, en virtud de la qual el agua sube bomba arriba; porque entonces estas dos presiones son evidentemente proporcionales á las bases sobre que obran. Fuera de esto, se echa de ver que la presion del ayre sobre una base qualquiera es igual al peso de una columna de agua, de una misma base, y de 32 pies de altura. Sean las verticales iguales *XY*, *YM*, de 32 pies cada una, las alturas de las dos columnas de agua, equivalentes á las presiones de la atmósfera en *QD* y *MN*. Esto supuesto, es patente que en virtud de la presion de la atmósfera en *QD*, el émbolo sostiene una fuerza, cuya expresion es $IH \times XY$; y que en virtud de la presion de la atmósfera en *MN*, la columna de agua *ACHIBK* comprime de abaxo arriba la cabeza *IH* del émbolo con una fuerza, cuya expresion es $IH \times MY$, hallándose disminuida esta misma fuerza por la pesantez de la columna *ACHIBK*, la cantidad $IH \times LM$; de donde resulta que la fuerza que impele la cabeza *IH* del émbolo de abaxo arriba es $IH \times LY$. Restando $IH \times LY$ de $IH \times XY$, la fuerza residua $IH \times LM$ es la que la cabeza del émbolo sostiene, y se debe añadir al peso de la columna *IHDQ*. Por consiguiente, atendiendo á todo, el émbolo sostiene el peso de una columna de agua, cuya base es *IH*, y la altura es la distancia vertical de la base *QD* al nivel del agua del depósito. Lo mismo diremos de otra posicion qualquiera del émbolo. Siempre sostiene (sean las que fueren las dimensiosiones del cuerpo de bomba y del tubo de atraccion) el peso de una columna de agua de igual base que él, y cuya altura es igual á la distancia vertical del punto hasta donde se quiere levantar el agua al nivel de la

del

del depósito. Añadiéndole á este peso el del émbolo Fig.
mismo, la suma será la fuerza que se debe aplicar al 111.
émbolo para el equilibrio no mas; pero para dar movimiento á la máquina, se le debe añadir á la misma fuerza cierta cantidad, ya para causar el movimiento, ya para vencer la resistencia del rozamiento y demas obstáculos que pueden originarse de la imperfeccion de la máquina. Escusarémos decir que el émbolo baxa á impulsos de su pesantez, y que por lo mismo mientras baxa no tiene que sostener peso alguno la fuerza motriz.

El que quisiere aplicar esta teórica á la práctica deberá tener presente que el pie cúbico de agua dulce pesa como unas 70 libras, conforme hemos dicho en otro lugar (255); que el *pie cilíndrico* de agua; quiero decir, un cilindro que tiene 1 pie de altura y 1 pie de diámetro, pesa como unas 55 libras &c. Por lo comun á la fuerza motriz calculada para el estado de equilibrio se le añade la tercera parte de su valor, para que pase la máquina al estado de movimiento; pero no tiene regla alguna fixa esta determinacion; pende de la naturaleza del rozamiento, y de la velocidad que se le intenta comunicar al peso que se quiera levantar.

338 Supongamos que haya llegado la bomba á un estado uniforme y permanente: y este es el estado en que se la procura poner. Es facil apreciar su efecto, quando se sabe con que velocidad se mueve el émbolo. Sea e el espacio que anda en un segundo subiendo; R, el radio de su base ó del cuerpo de bomba; P', la razon entre la circunferencia y el diámetro; el embolo levantará, y por consiguiente la bomba arrojará en un segundo un número $P'R^2e$ de pulg. cúbicas.

339 Ninguna dificultad habrá que vencer en la aplicacion de estos principios generales á casos particulares. Pero será indispensable tener constantemente en la memoria la consideracion hecha antes

Fig. tes (335). Quando la altura *LY* es muy corta, y su-
111. be por consiguiente el agua con poca velocidad por el cuerpo de la bomba, se debe moderar con tal pulso la velocidad y movimiento del émbolo, que nunca quede vacío alguno entre su cabeza y el agua que le sigue, porque si esto sucediera se perdería tiempo en la maniobra de la bomba. No faltan prácticos que, por no tener presente esta advertencia, se espantan de que una bomba movida con mucha velocidad no arroje sensiblemente mas agua que quando obra con lentitud. Es, pues, importante combinar las dimensiones de la bomba con la velocidad y el movimiento del émbolo, de modo que el agente gaste sin cesar utilmente toda la fuerza que de él se debe esperar.

112. 340 La figura representa una bomba *impelente*. El cuerpo de bomba *ACBK* está metido dentro del agua *MN*; el émbolo entra por abaxo, y levanta ó impele el agua; su espiga *Z* está firmemente asegurada al travesaño *bc* del bastidor mobil *abcd* que se sube y baxa alternadamente por medio de una palanca, ó de otro modo qualquiera; su cabeza lleva un agugero tapado con una válvula *F* que se abre de abaxo arriba. En *VP*, algo mas arriba de la superficie del agua hay un diafragma ó tabique con un agugero tapado con una válvula *E* que se abre de abaxo arriba. El cuerpo de bomba se une en *CB* con el tubo ascendiente *CBOQ* que lleva el agua hasta donde se la quiere levantar.

341 Para explicar como obra esta bomba, supongamos que en el primer instante esté el émbolo en el punto mas baxo de su carrera. Entonces el agua del depósito intenta levantar con su peso las dos válvulas *F*, *E*, y subirse por el cuerpo de bomba hasta el nivel *MN*. Llegada allí, ó quando por lo menos la parte del cuerpo de bomba, de entre las dos válvulas, está llena de agua, las válvulas se cier-

cierran por el peso que les queda en el fluido. Levántese ahora el émbolo; la válvula inferior *F* se queda cerrada, la válvula *E* se abre, y el agua contenida en el cuerpo de bómba, entre las dos válvulas, está precisada á subir mas arriba del nivel *MN*. Baxando el émbolo, la válvula *E* se cierra é impide que baxe el agua de encima; la válvula *F* se abre, y la parte del cuerpo de bomba, que las dos válvulas abrazan, se llena de agua. Volviendo á levantar el émbolo, la válvula *F* se cierra, la válvula *E* se abre, y el agua prosigue subiendo por el tubo *CBOQ*. Se echa de ver que en virtud del movimiento repetido del émbolo, el agua vá subiendo mas y mas por dentro del tubo *CBOQ*, y llega últimamente el término que se desea. Fig. 112.

342 No hay duda en que con esta bomba se levantará el agua á la altura que se quisiere, con tal que sea suficiente la fuerza motriz. Esta fuerza se calcula para esta bomba del mismo modo que para la bomba atraente. En el simple estado de equilibrio, siempre sostiene subiendo (ademas del peso del émbolo, y del bastidor *abcd*) el peso de una columna de agua cuya base es el círculo de la cabeza del émbolo, y la altura es la distancia vertical del punto hasta donde está levantada el agua, á un plano orizontal que enrasa con la superficie del agua del depósito. Quando el émbolo baxa, el agente no tiene que sostener el peso de que acabamos de hablar; no tiene mas oficio, durante el expresado tiempo, que acelerar, si es menester, la caida del émbolo. El efecto de la bomba se determina como antes, quando la velocidad del émbolo es dada.

343 La bomba *atraente é impelente* se compone de un tubo de atraccion *ACBK*, el qual se mete en el agua *MN*, de un cuerpo de bomba *CTSB*, y de un tubo ascendiente *HLOQ*. En *CB* y *VP* hay dos válvu- 113.

Fig. vulas *E*, *F* que se abren de abaxo arriba. El émbolo
113. es macizo, y no tiene agugereada la cabeza, como el de las otras bombas. Se mueve por dentro del cuerpo de bomba, y nunca baxa mas que hasta *HY*, á fin de que no se cierre la entrada *HL* del tubo ascendiente. Ya se vé que subiendo y baxando alternadamente el émbolo, el agua sube primero por el tubo de atraccion y el cuerpo de bomba, del mismo modo cabalmente que en la bomba atraente comun. Los movimientos alternados de las dos válvulas *E*, *F* son de todo punto los mismos en ambos casos. Al cabo de algunos golpes de émbolo, el agua llega al espacio que el mismo émbolo al tiempo de levantarse dexa desocupado en el cuerpo de bomba. Baxando despues el émbolo, la impele y obliga á subir por el tubo ascendente *HLOQ*. Volviendo á levantar el émbolo, vuelve á atraer mas agua, á la qual impele despues al tiempo de baxar; y así prosiguiendo.

344 Se determina á poca costa el valor de la fuerza motriz en esta bomba respecto del estado de equilibrio. Porque 1.° si suponemos que por la atraccion el agua suba hasta *ts*, es evidente que estando entonces cerrada la válvula *F*, la potencia que mueve el émbolo sostiene, ademas del peso del mismo émbolo, una parte del peso de la atmósfera, igual al peso de una columna de agua, cuya base es el círculo de la cabeza del émbolo, y la altura la distancia vertical de *ts* al nivel *MN* del agua del depósito. 2.° Mientras el émbolo impele el agua, estando cerrada la válvula *E*, el émbolo sostiene el peso de una columna de agua de igual base que él, y cuya altura es la distancia vertical de dicha base al plano orizontal que pasa por el punto *O* hasta donde llega el agua. Se echa de ver que el émbolo al tiempo de baxar ayuda con su peso á la potencia.

114. 345 En algunos casos se dispone la bomba atraen-

atraente é impelente, de modo que el émbolo, en vez de atraer al subir, é impeler al baxar, conforme obra la bomba, cuya descripcion acabamos de dar, atrae al baxar, é impele subiendo. Pero en ambos casos se calcula de un mismo modo la fuerza motriz, atendiendo al peso del émbolo. Fig. 114.

346 Estas son las tres especies principales de bombas. Todas las demas que se inventaren no serán mas que combinaciones mas ó menos sencillas de las primeras. No hay, pues, esperanzas de perfeccionar estas máquinas, sino disminuyendo quanto sea posible el rozamiento, valiéndose de buenos émbolos, y de válvulas fieles, que detengan el agua é impidan, siempre que sea menester, el paso al ayre exterior. Ofrece este punto á los artífices un campo muy dilatado en que exercitarse. Las mejores válvulas que se conocen son las que llaman de *conoba*, y 112.
las de *portezuela*. En la figura 112, *E* y *F* son valvu- 113.
las de concha; en las demas, *E* y *F* son portezuelas. 114.

347 Bien se echa de ver que en las tres bombas propuestas, el surtidor de agua que sale por el desaguadero no es continuo, sino intermitente; porque se gasta como la mitad del tiempo en baxar y levantar el émbolo para coger mas agua; y en todo este tiempo, ó no sale agua ninguna, ó sale muy poca por el desaguadero. Desde muchos años á esta parte se suele armar el tubo ascendiente, conforme está pintado en la bomba impelente de la figura, con una 115.
especie de tambor hueco *KR*, cerrado por afuera por todos lados, y que se comunica con el tubo interrumpido en *G* y *H*. Este tambor, que llaman el *depósito de ayre*, contiene al principio ayre cuya densidad es la misma que la del ayre exterior. Quando se levanta el émbolo, parte del agua que sube por el brazo *CBDQ* se vierte en el depósito *KR*; condensa el ayre que allí encuentra; le corta toda co-

Fig. comunicacion con el ayre exterior, y le reduce á no ocupar mas que el espacio *kryx*. Quando se baxa despues el émbolo, el ayre condensado como hemos dicho, se dilata por su elasticidad, obliga el agua á que baxe de *kr* á *KR*, y suba por consiguiente por el brazo *GHQD*. Es patente que continuando la misma maniobra sube incesantemente mas agua por dicho brazo, y que el surtidor debe ser continuo, por lo menos sensiblemente, en el desaguadero.

348 Algunos fabricantes de bombas creen que el depósito de ayre hace el efecto de la máquina la mitad mayor; porque como entonces, segun ellos se explican, el surtidor es continuo, la bomba debe dar doblada cantidad de agua de la que daria si no hubiera depósito de ayre, y fuese intermitente el surtidor. Pero no consideran los que así discurren, que el producto de la bomba nunca es mas que la cantidad de agua que el émbolo levanta al subir; y que la potencia motriz (siendo la misma la velocidad del émbolo) siempre gasta una misma fuerza, sea que haga subir dicha agua en derechura hasta la salida, sea que parte de la misma agua se vierta en el depósito, de donde la impele despues ácia arriba la elasticidad del ayre. Porque en el segundo caso es preciso contraer el resorte del ayre del depósito *KR*; y este esfuerzo junto con el que hace subir actualmente una parte del agua en el brazo *GHQD*, apura toda la fuerza; y esto viene á ser lo propio que en el primer caso. Por consiguiente, si el surtidor es continuo quando hay depósito de ayre, tambien sale el agua con una velocidad la mitad menor que la velocidad con que saldría si no hubiese tal depósito, y fuese intermitente el surtidor; el efecto de la bomba es siempre uno mismo. Es, pues, inutil el depósito de ayre en las bombas que no tienen otro destino que levantar el agua; pero tiene mucha cuenta en las bom-

bombas para los incendios, porque un surtidor de agua continuo apaga mas fácilmente el fuego que un surtidor intermitente, bien que tenga mayor velocidad. Fig. 115.

349 En las Memorias de la Real Academia de las Ciencias de Paris, para el año de 1716, viene propuesta una bomba que puede dar un surtidor continuo sin el socorro de ningun depósito de ayre. El Sr. *Quintin*, fábricante de bombas en Ruan, ha hecho y presentado á la Real Academia de las Ciencias una bomba de esta especie, cuya construccion es como sigue. *K* y *H* son dos tubos de atraccion; *CF* es un cuerpo de bomba; *Nu*, *fgb* son dos tubos ascendientes que á cierta altura se juntan en uno solo. El tubo de atraccion *K*, el cuerpo de bomba *CF*, y el tubo ascendiente *fgb* están dispuestos, segun se ve, del mismo modo que en la bomba atraente é impelente de la fig. 113. Las quatro válvulas de concha *S*, *s*, *S'*, *s'* se abren y cierran alternadamente de dos en dos. La espiga *Z* del émbolo entra por un collar ó platillo *CB* de cobre, dentro del qual se debe mover de modo que quede impedida toda entrada en el cuerpo de bomba al ayre exterior. En *yz* y *mn* hay dos aberturas por las quales el cuerpo de bomba se comunica con los dos tubos ascendientes. El émbolo baxa hasta *F*, y sube hasta *m*. 116.

Es muy perceptible el efecto de esta bomba. Supongamos que el émbolo esté primero en el punto mas baxo de su carrera. Así que se le levanta, dexa un vacío; el ayre que está debaxo, al dilatarse levanta la válvula *S*, y la presion de la atmósfera hace subir el agua; al mismo tiempo el ayre contenido en el cuerpo de bomba entre *CB* y la cabeza superior del émbolo, levanta la válvula *s* y se sale. Al baxar el émbolo, las dos válvulas *S* y *s* se cierran, y las otras dos *S'* y *s'* se abren, la una por causa del

 im-

Fig. impulso del agua que el émbolo al baxar hace en-
116. trar por la abertura yz en el tubo fgh, la otra por la dilatacion del ayre contenido en el tubo H, en el espacio Nm, y en el espacio que hay entre la cabeza del émbolo y CB; y así prosiguiendo. Quando todo el cuerpo de bomba está lleno de agua, el émbolo atrae é impele sin cesar, y el surtidor debe ser continuo, ó faltará muy poco. El constructor de esta máquina ha añadido, naturalmente con la mira de que sea todavía mas perfecta la continuacion del surtidor, al tubo montante fgb un depósito de ayre AE. La Academia ha declarado que esta bomba obra muy bien.

350 Qualquiera agente sea hombre, caballería, corriente de agua, &c. puede servir para mover una bomba. Las pequeñas, como las que sirven para sacar agua de los pozos, y para los incendios, las mueven hombres. Quando se quiere levantar una cantidad considerable de agua, se multiplica á proporcion la fuerza motriz; y para que obre continuamente un mismo efecto, con corta diferencia por lo menos, sin pararse jamas, se ponen varias bombas de modo que quando unos émbolos baxan otros suben. Este movimiento alternado se facilita con cadenas amarradas á unas cigüeñas verticales ú orizontales que se mueven con alguna rueda á la qual hace dar vueltas una corriente de agua, ó con otra máquina.

351 Los tubos de las bombas aguantan en algunas ocasiones esfuerzos muy grandes. Quando estos tubos se hicieren de materias flexibles, pongo por caso de plomo, cobre, y aun de hierro, y se hubieren valuado en columnas de agua de alturas dadas las presiones que aguantan, se hallarán, por lo declarado (219), los gruesos que han de tener para que no rebienten.

Fig.

PRINCIPIOS
DE ÓPTICA.

352 TOdos saben que si no fuera por la luz no habria ningun cuerpo visible en toda la naturaleza. La presencia de algunos cuerpos, de aquellos que llamamos *cuerpos luminosos*, se nos manifiesta porque arrojan de sí, ó ponen en movimiento una materia que introduciéndose en el órgano de la vista dexa allí pintada su imagen. Otros cuerpos al contrario, nos dexarian en unas tinieblas eternas, si no hubiese mas que ellos en el mundo; y solo se nos hacen perceptibles á la vista, porque rechazan ácia ella la luz con que los hieren los cuerpos luminosos. Entre los cuerpos que de suyo no son visibles, algunos cierran enteramente el paso á la luz, y se llaman *cuerpos opacos*; otros consienten que los atraviese, franqueándola un paso mas ó menos libre, segun ciertas circunstancias, y los llamamos *cuerpos diáfanos* ó *transparentes*. Pero por lo mismo que los cuerpos opacos rechazan ó *reflecten* la luz, suelen mudar su primera direccion; y los cuerpos diáfanos tambien la desvian, en muchos casos, del rumbo que seguia, porque al tiempo de atravesarlos experimenta una resistencia que en algunas ocasiones la obliga á *torcerse*, *quebrantarse*, *refractarse*, ó *refringirse*.

353 Son, pues, dos las principales *afecciones* ó propiedades de la luz, dos por consiguiente los ramos de la Optica ó Ciencia cuyo asunto es averiguarlas todas; es á saber, el ramo que trata de la luz reflexa, ó de la reflexion de la luz, y se llama *Catóptrica*; y el que abraza quanto pertenece á la luz refracta, ó á la refraccion de la luz, cuyo ramo se llama *Dióptrica*.

Fig. 354 Pero como el blanco de todas las especulaciones de la Optica es dar auxîlios que enmienden los defectos de la vista, dilaten su campo, ó aumenten su perspicacia, para cuyo fin se han inventado muchísimos instrumentos de gran primor; á esto mismo se dirigirá quanto llevamos ánimo de declarar en estos principios, donde tratarémos por consiguiente 1.º de la luz directa. 2.º de la luz reflexa. 3.º de la luz refracta. 4.º de la vision. 5.º de los instrumentos mas socorridos para mejorarla ó dilatarla.

DE LA LUZ DIRECTA.

355 La *luz* es aquella materia que los cuerpos luminosos arrojan de sí, ó ponen en movimiento, y no es otra cosa que un fluido sutilísimo que se mueve en qualesquiera direcciones. De qualquiera modo que todo cuerpo luminoso ó iluminado comunique el movimiento á las partículas de la luz, se echa de ver que por razon del impulso simple que les dá, se han de mover en linea recta. Todo cuerpo iluminado ó luminoso se puede considerar como colocado en el centro de una esfera compuesta de corpúsculos luminosos que impele y mueve en las direcciones de los radios de dicha esfera.

356 A estos radios ó hilos de átomos luminosos los llamamos *rayos* de luz. Ya hemos dado á entender que estos rayos son siempre rectos quando ningun obstáculo los obliga á torcerse. Entre muchos fenómenos que prueban que la luz siempre camina en linea recta, como son la progresion de las sombras detrás de los cuerpos iluminados; la imposibilidad de ver un cuerpo, ó por lo menos algunas de sus partes, quando se interpone algun obstáculo entre él y el ojo del expectador; traeremos solo el siguiente.

Ciér-

357 Ciérrense todos los balcones, puertas, ventanas &c. de un quarto, de modo que no le pueda entrar luz por parte alguna sino por un agugerito hecho á propósito para que entre un rayo de luz; si el tiempo fuere sereno, se verán en las paredes del quarto, que suponemos lisas y blanqueadas, todos los objetos de afuera que estuvieren enfrente del agugero, pintados con todos sus colores, bien que se reparará algo debilitada su viveza. Las imágenes de los objetos fixos, como los árboles, las casas &c. parecerán fixas; las de los objetos en movimiento, como los hombres, los caballos &c. parecerán en movimiento. Pero todos estos objetos estarán pintados trastornados, porque al pasar por el agugero se cruzan allí los rayos de la luz. Si diere la luz del sol en el agugero, se reparará un rayo luminoso que irá en linea recta á terminarse en la pared opuesta ó en el techo; y si un hombre que estuviere en el quarto pusiere el ojo en el agugero, verá patentemente que el ojo, el agugero y el sol están en una misma linea recta; lo propio digo de los demas objetos pintados en el quarto. Las imágenes de los objetos pintadas en un mismo plano son tanto menores, quanto mayor es la distancia á que están del agugero los objetos. De este experimento resulta: Fig. 117.

358 1.° Que *la luz siempre camina ó procura caminar en linea recta.*

359 2.° Que *un punto qualquiera de un objeto luminoso puede ser visto desde todos los sitios adonde una recta tirada desde dicho punto puede ir á parar sin encontrar obstáculo alguno.* Porque la pintura de un objeto que se mueve, siempre es visible en el quarto ó *cámara obscura*, todo el tiempo que el objeto se mantiene enfrente del agugero.

360 3.° Que *un punto luminoso arroja luz al rededor de sí, y es el centro de una esfera de luz que se* di-

Fig. *difunde ó desparrama por todos lados.* Si concebimos que se interceptan con un plano algunos de estos rayos de luz, será el punto luminoso el vértice de una pirámide de luz, cuyo cuerpo se compone del agregado de estos rayos interceptados, siendo su base el plano mismo que los intercepta.

361 4.º Que *la imagen de la superficie de un objeto pintado en la pared es tambien la base de una pirámide de luz cuyo vértice está en el agugero de la cámara obscura*; los rayos que componen esta pirámide forman otra semejante y opuesta á la primera, al cruzarse en el agugero donde está tambien su vértice; y cuya base es la superficie del mismo objeto pintado en la pared del quarto.

362 5.º Que *no pueden menos de ser muy sutiles las partículas de la luz*; pues los rayos que vienen de cada uno de los puntos visibles de todos los objetos puestos enfrente del agugero de la cámara obscura, pasan todos por un agugero sumamente pequeño sin embarazarse sensiblemente, ni confundirse.

363 Por mas rápido que sea el movimiento de la luz, no es posible, ni tampoco lo alcanza la imaginacion, que llegue en un instante indivisible desde el cuerpo luminoso hasta nosotros; necesita por precision algun tiempo para hacer esta travesía, y vamos á determinar su velocidad.

Hay entre los planetas uno llamado Júpiter al rededor del qual dan la vuelta, en tiempos diferentes, quatro satélites ó lunas que le acompañan de contino. Así los satélites como el planeta lucen todos de prestado, pues solo resplandecen porque rechazan la luz con que los baña el Sol. Llega uno de estos satélites (y lo propio les sucede á los demas) á tal punto de su giro, que hallándose directamente Júpiter entre él y el Sol, la sombra que Júpiter arroja le hace invisible algun tiempo, y no se le vuelve

á

á ver hasta que sale de la sombra que le tenia oculto. Sucede, pues, que quando la tierra está mas distante de Júpiter, la *emersion* del satélite, esto es su salida de la sombra, se repara mas tarde de lo que corresponde al cómputo, que quando se halla la tierra á menor distancia del planeta. Esta diferencia solo proviene de que en el primer caso necesita mas tiempo la luz para andar el mayor trecho que hay entonces entre el satélite y la tierra. Fig.

Sea v. gr. *S* el Sol, al rededor del qual anda la tierra en el discurso de un año la curva *ABCFG*; *HI* parte de la curva ú órbita que anda Júpiter *K* al rededor del Sol; y *LMN* la órbita que anda al rededor de Júpiter el satélite, el qual quando llega á *L*, estando en una misma recta con Júpiter y el Sol, se halla sepultado en la sombra del planeta. Si la tierra se mantuviera constantemente en *A*, donde la suponemos al tiempo de observarse una de las primeras emersiones del satélite, que suceden despues de haberse hallado la tierra entre el Sol y el planeta, todas las demas emersiones se observarian en el mismo instante que tienen computado los Astrónomos. Pero en el intervalo que hay entre esta primera emersion y la siguiente, la tierra pasa á *B*, y se aparta de Júpiter la distancia *AA'* Luego si la luz gasta algun tiempo para pasar de un lugar á otro, llegará mas tarde á *B* que á *A*; bien que la diferencia será muy corta respecto de dos emersiones consecutivas. Pero quando la tierra llegare al punto *C* de su órbita, entonces el cálculo anunciará la emersion mas pronto de lo que se observará, y la diferencia será igual á todo el tiempo que necesitare la luz para andar el intervalo *AC*, que casi es igual al diámetro de la órbita terrestre, y esto es cabalmente lo que se observa. Al contrario, quando la tierra llegada á *E*

Fig. 118. empezáre á ver las *inmersiones* del mismo satélite, esto es su entrada en la sombra, la tierra irá ácia la luz, y la observacion se verificará mas presto de lo que corresponde al cómputo; por manera que quando el observador terrestre estuviere en *G*, verá la inmersion del satélite antes de lo que esperaba en virtud del cálculo, y la diferencia será igual al tiempo que necesita la luz para atravesar el intervalo *GE*.

Como consta por las observaciones astronómicas que las emersiones del satélite se observan en *A* como unos 16′ antes que en *C*, y es *AC* casi el diámetro de la órbita de la tierra, se sigue que para andar su mitad, ó el radio de la misma órbita, gasta la luz unos 8′. Luego este será el tiempo que gastará la luz para venir desde el Sol á la tierra.

364 Una vez que por lo dicho (355) el cuerpo luminoso está en el centro de una esfera de luz que se desparrama al rededor de él en linea recta, se sigue que los rayos se van apartando unos de otros al paso que se alejan del punto de donde salen, quiero decir que *divergen* ó son *divergentes*. Por consiguiente estando mas apartados unos de otros, quanto mas lejos están de su nacimiento, será menor en un mismo espacio la masa de luz quando estuviere dicho espacio á mayor distancia del cuerpo luminoso, y por lo mismo será la luz mas debil. Luego pierde de su fuerza ó *intensidad* la luz al paso que se aparta de su origen.

Para averiguar en que razon vá menguando la fuerza de la luz, sea *A* el punto luminoso ó *radiante*, y sean las *DE*, *HG* perpendiculares á la recta *AB*; sobre los diámetros *DE*, *HG* trácense círculos cuyos diámetros sean perpendiculares á *AB*, los quales por lo mismo serán paralelos unos con otros. La misma porcion de luz que ilumina ó llena ll area del círculo *DE*, llena tambien la area dea cír-

círculo HG; luego la intensidad de la luz en el círculo DE es á la intensidad en el círculo HG recíprocamente como las areas de los mismos círculos, esto es $:: (HB)^2 : (DC)^2 :: (BA)^2 : (CA)^2$, por ser BA y CA proporcionales á HB y DC. *Luego la fuerza ó intensidad de la luz mengua en razon inversa de los quadrados de las distancias al cuerpo luminoso.* Fig. 119.

365 Por consiguiente las cantidades de luz que recibe una superficie qualquiera puesta succesivamente á distancias duplas, triplas, &c. del cuerpo luminoso son $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$ &c. no mas de la cantidad total que la misma superficie recibia estando á la primer distancia. Y como esta diminucion de la luz procede de su divergencia, síguese que ni esta diminucion, ni la ley que sigue se verificarán quando el punto luminoso está, ó se puede considerar que está á una distancia infinita; porque entonces los rayos que arroja son sensiblemente paralelos (I. 369), y dá el cuerpo la misma cantidad de luz á qualesquiera distancias.

366 La ley que sigue la luz en su diminucion al paso que crece la distancia á que están del cuerpo luminoso los objetos, siendo divergentes sus rayos, solo se verifica quando atraviesa un medio ó espacio libre, y no se pierde luz ninguna. Quando el medio intercepta ó apaga alguna parte, sigue otra ley la diminucion de la intensidad de la luz.

367 Para averiguarla, supongamos que sea uniforme la densidad del medio, y consideremos primero el caso en que los rayos son paralelos, á fin de que no padezca la luz mas merma que la que puede ocasionar la densidad del medio que atraviesa. Vamos á probar *que en este supuesto mengua la luz en progresion geométrica.*

Por-

Fig. Porque supongamos que la cantidad de las partes del medio que interceptan la luz, sea $\frac{1}{n}$ del volumen total. Si nos figuramos este medio ó cuerpo diáfano dividido en rebanadas de un grueso igual al diámetro de estas partecillas, se echa de ver que si m representa la cantidad ó el número de rayos que dan en la primera rebanada, será $m \times \frac{1}{n}$ la luz que se perderá en la primera rebanada. Luego la luz que de ella saliere será $m - \frac{m}{n} = m\frac{(n-1)}{n}$. Y como las rebanadas son iguales, la luz que la segunda rebanada apagará será $\frac{m(n-1)}{n} \times \frac{1}{n}$ ó $\frac{(n-1)m}{n^2}$; por consiguiente la luz que entrará en la tercera rebanada ó sale de la segunda, será $m\frac{(n-1)}{n} - \frac{m(n-1)}{n^2} = m\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$; la que saldrá de la tercera será $m\left(\frac{n-1}{n}\right)^3$ &c. Y si expresamos en general con la unidad la cantidad de rayos que dán en la primera superficie del medio diáfano, la expresion del menoscabo que la luz padece será esta serie de términos $\frac{n-1}{n}$, $\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$, $\left(\frac{n-1}{n}\right)^3$ &c.

368 Una vez que la luz mengua en progresion geométrica, quando se propaga por rayos paralelos en un medio homogeneo, es evidente que quando hubiere atravesado varios gruesos de dicho medio, podremos figurar sus fuerzas respectivas en las ordenadas de una logarítmica, cuyo exe sea el grueso del
120. cuerpo. Supongamos que $ABCD$ represente un medio diáfano homogeneo, y concibámosle dividido en rebanadas de un mismo grueso. Si representa BP la cantidad de luz que entra en el medio perpendicularmente á su lado AB, y QF su cantidad ó fuerza des-

despues de atravesado el grueso *BF* de la primera Fig. rebanada; es constante que si por los dos puntos *P* y *Q* se traza una logarítmica *PQVZ*, cuyo exe sea el grueso *BC*, sus demas ordenadas *RH*, *SK*, *TM* &c. que menguan en progresion geométrica (II. 538), representarán las fuerzas de la luz quando hubiere atravesado los gruesos *BH*, *BK*, *BM* &c.

369 Si fuere distinta la transparencia del medio, se echa de ver que la logarítmica ya no sería la misma. Si fuere mayor su transparencia, sería preciso que atravesase la luz mayor trecho para padecer igual menoscabo, y habría por lo mismo mayor distancia entre las ordenadas de la curva &c.

370 Quando el cuerpo luminoso no está tan 120. apartado que se puedan considerar sus rayos como paralelos, su divergencia al apartarse del cuerpo tambien contribuye para debilitar la intensidad de la luz, y la ley que sigue este menoscabo es como la razon inversa (364) de los quadrados de las distancias al punto luminoso. Por consiguiente, si llevamos tambien en cuenta el menoscabo procedente del defecto de transparencia del medio, se echa de ver que *las fuerzas diferentes de la luz estarán en razon compuesta de la inversa de los quadrados de las distancias, y de la directa de las ordenadas de la logarítmica correspondiente al medio que atraviesa.*

DE

Fig.

DE LA LUZ REFLEXA, ó DE LA CATÓPTRICA.

371 Quando un rayo de luz dá oblicuamente en una superficie bruñida ó lisa, sin penetrarla, se desvía de su direccion, y la mudanza que esta padece se llama *reflexîon*. Preguntemos á la experiencia como se hace, y que circunstancias la acompañan.

121. 372 Trácese en una tabla muy lisa *KLMN* al rededor del centro *C* un círculo *PRQS* (quanto mayor fuere tanto mejor será), y despues de tirados los dos diámetros *PQ*, *RS* perpendiculares uno á otro, córtense desde el punto *P* dos arcos iguales *PA*, *PB*, y tírense al centro los radios *AC*, *BC*. Plántense despues tres alfileres perpendiculares en los puntos *A*, *B*, *C* de la tabla, métasela dentro del agua hasta que llegue esta al diámetro *RS*, manteniendo la tabla en situacion perpendicular á la superficie del agua; se mirará por los dos alfileres *A*, *C*, y se verá dentro del agua la imagen del alfiler *B* á lo largo de la linea *AC* prolongada. Esto manifiesta que el rayo de luz que viene de la punta *B* se reflecte en el punto *C* de la superficie del agua, á lo largo de la linea *CA* al ojo del espectador. Si el alfiler plantado en *C* tocára el agua, empañaría lo terso de la superficie del agua; por esto es mejor plantarle un poco mas arriba del centro del círculo en la linea *CA*.

373 *AC* se llama el *rayo incidente*; *CB*, el *rayo reflexo*; *PCQ*, la perpendicular de incidencia ó el *cateto* de incidencia; *ACP*, el *ángulo de incidencia*; *BCP*, el *ángulo de reflexîon*.

374 *El ángulo de incidencia y el de reflexîon están en un mismo plano*; quiero decir, que ambos están

en

en el plano que pasa por el rayo incidente, y por la perpendicular de incidencia. Fig.

375 *El ángulo de reflexîon es igual al ángulo de incidencia*; de donde se sigue que *el rayo incidente y el rayo reflexo están igualmente inclinados respecto de la superficie reflectente.*

376 Síguese tambien que *quando el rayo incidente es perpendicular á la superficie reflectente, se reflecte ácia la misma perpendicular que traza al ir á dar en la superficie.*

377 Un rayo de luz es reflectido por una superficie esférica del mismo modo que lo sería por un plano que tocase dicha superficie en el punto de incidencia. Porque el punto de contacto es comun á las dos superficies.

378 Como cada punto de un cuerpo luminoso arroja sin cesar rayos de luz, y los arroja por todos lados ácia todas las direcciones posibles; del mismo modo los demas cuerpos que ellos alumbran y hieren con sus rayos, los despiden continuamente desde cada uno de sus puntos. Porque todos los puntos de un cuerpo opaco alumbrado son perceptibles á la vista en todos los puntos del espacio y á cada instante, del mismo modo que los puntos del cuerpo luminoso que los ilumina. Podemos, pues, considerar la superficie del objeto como compuesta de lineas físicas, y estas lineas como formadas de puntos físicos, que nos figuramos que despiden rayos ácia todas las direcciones. En lugar del objeto se suele considerar una linea que le representa; y todas las mudanzas que padece esta linea en su magnitud aparente ó en su claridad y distincion, se miran como propias del objeto que dicha linea representa.

379 El punto *Q* del qual los rayos se van apar- 122.
tando y respecto del qual son divergentes, ó ácia el qual son convergentes, quando se les obliga á retro-

ce-

Fig. ceder ácia el mismo punto, aunque no le alcancen, se llama su *focus*; y en ambos casos una porcion qualquiera de estos rayos como *QBC* ó *QBA* tomada separadamente, se llama una *espiga* ó *manojo* de rayos. Se dice que estos rayos pertenecen á dicho focus, ora esté cerca, ora esté á una distancia inmensa; y en este último caso se consideran los rayos como paralelos unos con otros (365). Como los rayos no siempre se juntan en el punto ácia el qual se encaminan, se llama este punto *focus real*, ó solamente *focus* quando concurren en él efectivamente; y se llama *focus virtual* ó *imaginario*, quando solo concurren allí sus prolongaciones.

123. 380 Representa *QC* un manojo de rayos que hieren paralelos una superficie plana muy tersa figurada en la linea *ACB*, que los reflecte en otras tantas lineas tambien paralelas *Cq*, que están inclinadas al plano lo mismo que los rayos incidentes (375).

122. 381 Representa *QAB* una espiga de rayos divergentes, porque se ván apartando de un punto visible *Q*, y dan en una linea recta *ACB* ó en un plano bruñido que esta linea representa; estos rayos son todos divergentes despues de la reflexîon, como si vinieran desde otro punto *q*. El rayo *QC* que dá perpendicularmente en el plano *AB*, se vuelve por la misma linea *CQ* (376); pero todos los demas que dan en dicha linea con grados de oblicuidad, siempre mayores, en puntos de incidencia siempre mas apartados del punto *C*, son tambien rechazados con grados de oblicuidad, tambien respectivamente mayores (375). Es, pues, preciso que el que atendiere bien á la figura se haga cargo de que los rayos reflexos, prolongados ácia atrás, encuentran todos la perpendicular *QC* en un punto *q*, tan apartado por un lado del plano reflectente, como lo está del otro lado el punto *Q*, y que por consiguiente todos los rayos que vienen del úni-

único punto Q, son divergentes despues de la refle- Fig.
xíon, y se apartan del único punto q á igual distan- 122.
cia del otro lado del plano reflectente.

382 Y al contrario, si por alguno de los medios que propondremos mas adelante, hiciéramos converger los rayos ácia el punto q, el punto Q será su focus despues de la reflexíon que padecieren en la superficie AB (380).

383 Lo que va dicho del punto Q se aplica á 124.
otro punto qualquiera de un objeto PQR; porque por la misma razon que el punto Q y su focus q están de cada lado de dicho plano á la misma distancia (381), los puntos P, R, y sus focus p, r están tambien al uno y otro lado de dicho plano á distancias respectivamente iguales en las rectas Pp, Rr que le atraviesan perpendicularmente. Y como sucede lo propio respecto de otro punto qualquiera del objeto PQR, se echa de ver que estando los focus p, q, r, y una infinidad de otros qualesquiera en la misma disposicion que los puntos correspondientes P, Q, R, forman aquellos una linea imaginaria perfectamente semejante á la linea PQR, y cuya situacion al otro lado del plano reflectente es de todo punto la misma que la de PQR. Esta linea pqr se llama *la imágen* ó *la estampa* del objeto PQR.

384 Si unos rayos paralelos dan en una superfi- 125.
cie esférica, cóncava ó convexá, figurada en el arco 126.
de círculo ACB, la reflexíon los hará convergir ácia un focus T, quando dieren en el lado cóncavo de la superficie, y divergirán al contrario de dicho focus, si dieren en el lado convexô. En estos casos el rayo QC, que pasa por el centro C de la superficie reflectente, y la encuentra perpendicularmente en Q, vuelve atrás por la misma recta CQ (376 y 377). Pero atendida la curvatura de dicha superficie, los demas rayos paralelos á CQ la encuentran con oblicuida-

Fig. dades diferentes. Cada rayo siempre forma con la per-
125. pendicular en el punto donde dá, un ángulo de inci-
126. dencia *DAE*, tanto mayor, quanto mas dista de *QC*;
y por lo mismo (375) el ángulo de reflexion *EAT*
crece al paso que el punto de incidencia *A* se aparta
de *C*. Esto está diciendo, que si la superficie reflec-
tente fuese cóncava, los rayos reflexos habrán de con-
vergir, y juntarse, quando no perfectamente, por lo
menos con corta diferencia, en un punto *T* del rayo
directo *QC*; y que al contrario divergirán de un pun-
to semejante, si la superficie fuese convexâ. Despues
de considerar con mas atencion todas las circunstan-
cias de esta reflexion, y preguntada á la experiencia,
se halla que el focus *T* está en medio *CE*.

125. 385 En los casos tocados, si los rayos incidentes
126. salieren del punto *T*, ó se encaminasen á él, serán
reflectidos paralelamente á la recta *CTE*, tirada
por el centro *E* de la superficie reflectente. Pero si
127. *T* se acercare á *E*, y cayere, v. gr. en *q*, los ángu-
los de incidencia *qAE*, y por consiguiente los án-
128. gulos de reflexion *EAQ*, iguales con ellos, llegarán
á ser menores; y si se acercare á *C* llegarán á ser
mayores.

129. 386 Las figuras hacen patente como se forma la
130. imágen *pqr* de un objeto *PQR* por rayos reflectidos
en una superficie cóncava ó convexâ *ACB*. Estándo
el focus *q* en el rayo *QC* perpendicular á la superfi-
cie reflectente (384), el qual pasa por el centro *E*,
es constante que el focus ó punto de reunion *p* de un
manojo de rayos que viene de otro punto qualquiera
P, está indispensablemente en el rayo perpendicu-
lar *PA*, que tambien pasa por el centro *E*. Porque
todos los rayos que pasan por el centro son perpen-
diculares á la superficie *ACB*, y todos los demas
son inclinados respecto de ella.

387 Síguese de aquí, que si el objeto *PQR* fue-
se

se tan chico, ó tan apartado de la superficie reflec- Fig.
tente, que sea lícito suponer todos los puntos P,Q,R 129.
con corta diferencia á distancias iguales del centro, 130.
las distancias de todos los puntos p, q, r de la imágen á la misma superficie, tambien se podrán considerar como iguales. Es tambien de notar que quando la imágen y el objeto están de un mismo lado del centro, la imagen está derecha, y está trastornada quando están en lados opuestos; y que es mayor ó menor que el objeto, conforme está mas lexos ó mas cerca del centro, que el objeto. Todo esto lo están diciendo las figuras, donde el objeto y la imágen están terminados por las rectas Pp, Rr, las quales se cortan en el centro E. Por consiguiente, la imágen es, con corta diferencia, igual al objeto, quando se encuentra con ella en la superficie (385),
ó en el centro. Porque en este último caso, quando 131.
el objeto y la imágen están en el centro, los rayos que salen del punto Q, que está allí mismo, ván á juntarse despues de la reflexion en un punto q, que tambien se confunde con dicho centro, y con hacer $Ep = EP$, por ser EC perpendicular á estas lineas, los ángulos PCE, ECp serán iguales, y por consiguiente el rayo PC se reflectirá á p. Si se toma otro punto qualquiera de incidencia poco distante de C, la recta AE será, con corta diferencia, perpendicular á Pp; y por lo mismo los ángulos PAE, EAp serán con corta diferencia iguales; el radio PA será reflectido, con corta diferencia, á p, del mismo modo que el rayo PC.

Determinacion del focus de los rayos reflectidos por una superficie dada.

388 *Sea* ACB *un plano reflectente*; Q, *el punto* 132.
de donde salen los rayos incidentes; *y* QC *perpen-*

Fig. *dicular á dicho plano; si se prolonga esta perpen-*
132. *dicular hasta* q, *haciendo* qC = QC, *el punto* q *será el focus de los rayos reflexos.*

Sea *QA* un rayo incidente; tírese *qA*, y prolónguese ácia *O*. Ya que *Cq* = *CQ*, los triángulos *CAq*, *CAQ* son iguales; luego el ángulo *DAO* es igual al ángulo *CAQ*, y por consiguiente *AO* es el rayo reflexo.

389 Luego los rayos que dán en el espejo *ACB* con direcciones ácia *q*, ván á juntarse en *Q* despues de la reflexion.

133. 390 *Si unos rayos paralelos* DA, EC *dán casi*
134. *perpendiculares en una superficie esférica* ACB, *el focus* T *de los rayos reflexos estará en medio del radio* EC, *paralelo á los rayos incidentes.*

Tírese la *EA* que será perpendicular á la superficie esférica en *A*. Ya que *EC* está en el mismo plano que el ángulo de incidencia *DAE* (374), el rayo reflexo *Aq*, prolongado, encontrará *EC* en algun punto *q*; y por ser el ángulo de reflexion *EAq* igual al ángulo de incidencia *DAE*, ó al ángulo *AEq* (I.373), los dos lados *Aq*, *Eq* del triángulo *AEq* son iguales, y cada uno de ellos es mayor que la mitad del tercer lado *EA* ó que *ET*, por construccion. Suponiendo, pues, que el punto de incidencia *A* se acerque á *C*, las lineas *Eq*, *ET* se irán acercando de contino á la igualdad, y serán por último iguales quando el punto *A* coincidiere con *C*, y se desapareciere el triángulo *AEq*; por consiguiente el focus de los rayos que dan con muy corta diferencia perpendiculares en la superficie, ó de los mas inmediatos á *C*, se ha de fixar en *T*.

391 Por consiguiente, si *T* fuese un punto radiante, los rayos que envia á la superficie reflectente *ACB*, caminarán, despues de la reflexion, paralelos á *TE*.

Sea

114

115

116

119

121

122

123

392 *Sea* ACB *una superficie esférica reflectente, cuyo centro está en* E. *Si despues de dividido por medio en* T *un radio qualquiera* EC, *se toman en este radio del mismo lado respecto de* T, *dos puntos* Q *y* q, *tales que* TQ, TE, Tq *estén en proporcion continua; y los rayos incidentes salieren del punto* Q, *su focus despues de la reflexion estará en* q. Fig. 135. 136.

Sea *AQ* el rayo incidente, y *Aq* el rayo reflexo, ó su prolongacion, que forman ángulos iguales con la perpendicular *AE*. Como el rayo reflexo *Aq*, ó su prolongacion está en el plano de incidencia, cortará en algun punto *q* la *QE*, prolongada si fuere menester. Tírese paralela á *Aq* la recta *EG*, que encuentre *AQ* en *G*, y la *Eg* paralela á *AQ*, que encontrará *Aq* en *g*. Se viene á los ojos que los triángulos *EAG*, *EAg* son semejantes, isósceles, é iguales; y por consiguiente, si nos figuramos que el punto *A* se acerque á *C*, y coincida con él, entonces se desaparecerá el paralelógramo *AGEg*, y cada uno de sus lados llegará á ser igual á la mitad de la diagonal *AE* ó á *ET*, por construccion. Pero los triángulos semejantes *GQE*, *gEq* dán *GQ* : *GE* :: *gE* : *gq*; luego quando el punto *A* cae en *C*, y por consiguiente los puntos *G* y *g* en *T*, será *TQ* : *TE* :: *TE* : *Tq*.

393 Síguese de aquí 1.° que si los rayos incidentes salieren del punto *q*, su focus despues de la reflexion estará en *Q*.

394 2.° Si el punto *Q* estuviese á una distancia infinita, es evidente que por ser *TQ* infinita, *Tq* será nula. Este es el caso de la proporcion que probamos antes (390), pues entonces los rayos deben considerarse como paralelos.

395 3.° El rumbo que hemos seguido para probar las dos últimas proposiciones (390 y 392), manifiesta que el método por el qual hemos determinado

Fig. el focus de los rayos reflexos, no es rigurosamente
135. geométrico; solo determina la interseccion del exe
136. de la superficie, y de los rayos reflexos mas inmediatos al mismo exe. Por lo que mira á los rayos reflexos que no están tan cerca, ván á encontrar el exe en diferentes puntos, tanto mas apartados del punto de reunion de los primeros, quanto mas lexos del exe están dichos rayos. Por consiguiente un espejo esférico no puede reflectir todos los rayos en un mismo punto.

396 Quando los puntos Q, q están á un mismo lado de la superficie reflectente; si los rayos incidentes vienen de Q, ván despues de reflectidos ácia q; y si en vez de salir de Q, vienen del lado opuesto con direcciones ácia dicho punto, ván, despues de reflectidos, ácia el lado opuesto á q; lo contrario se verifica quando los puntos Q y q están en distintos lados de la superficie. Todo esto es evidente, pues los rayos incidentes y reflexos siempre siguen direcciones encontradas.

Determinacion del lugar, magnitud y situacion de las imágenes formadas por rayos reflexos.

397 *Las imágenes que forman rayos reflectidos por un espejo plano, son semejantes é iguales con los objetos que representan, y sus partes están puestas detrás del espejo á distancias iguales á las distancias de las diferentes partes del objeto.*

137. Todo esto es evidente; porque si desde un núme-
138. ro qualquiera de puntos P, Q, R de un objeto colocado como se quisiere respecto del espejo, se baxan las perpendiculares PA, QC, RB al espejo, y se las prolonga hasta que sus extremos p, q, r estén tan distantes detras del espejo, como los puntos P, Q, R; los puntos p, q, r (388), los quales serán los fo-

focus respectivos de los rayos que salieren de los puntos P, Q, R estarán colocados del mismo modo que estos últimos puntos; por otra parte, sus distancias al espejo son respectivamente iguales con las de los puntos P, Q, R, y se echa de ver que lo mismo sucede respecto de los focus ó imágenes de todos los demas puntos del objeto. Luego todas estas imágenes particulares formarán una imágen igual al objeto, colocada del mismo modo y á la misma distancia del espejo. Fig. 137. 138.

398 *Si el objeto puesto delante de un espejo cóncavo ó convexô* AB *fuese un arco circular* PQR *concéntrico con el espejo, su imágen* pqr *será tambien un arco concéntrico semejante, cuya longitud tendrá con la del objeto la misma razon que sus distancias al centro comun* E; *y dicha imágen será derecha ó trastornada, segun estuvieren el objeto y ella á un mismo lado, ó á lados distintos respecto del centro.* 139. 140.

Como el focus q se halla con tomar en la recta QE tirada por el centro del espejo (392), las TQ, TE, Tq en proporcion continua, se determinará el focus ó la imágen p de otro punto qualquiera P, con tirar primero PEA, dividir despues EA por medio en S, y tomar SP, SE, Sp en proporcion continua. Pero los dos primeros términos de esta proporcion son iguales, cada uno al suyo, con los dos primeros de la antecedente; luego los terceros términos Tq, Sp son iguales; luego $Ep = Eq$. Como lo propio se puede probar respecto de cada uno de los demas puntos del objeto circular PQR, se echa de ver que la imágen pqr de dicho objeto es un arco circular concéntrico, y perfectamente semejante, pues ambos son terminados por las mismas lineas EPp, ERr; y por consiguiente hay entre sus longitudes la misma razon que entre sus distancias EQ, Eq al centro comun E.

Fig.

DE LA LUZ REFRACTA, ó DE LA DIÓPTRICA.

399 El experimento que dexamos propuesto (372) manifiesta los fenómenos fundamentales de la Dióptrica del mismo modo que los de la Catóptrica.

141. Estando, pues, todo dispuesto, como allí diximos, tírese en la tabla *KLMN* la recta *AB* que corta *CP* en *D*, Se tomarán en *DB* y *CS* las partes *DH* y *CI* ambas iguales á los tres quartos de *DA*; por los puntos *H*, *I* tírese la recta *HIE*, que encuentra la circunferencia en *E*; y la *EF* tirada desde *E* perpendicular á *PQ*, será igual á *DH*, ó á los tres quartos de *DA*. Si plantando despues un alfiler en *E*, se mete la tabla dentro del agua, y se aplica el ojo en la linea donde están los alfileres *A* y *C*, se verá el alfiler *E*. La refraccion que padece en *C* el rayo que sale de dicho alfiler, le precisa, pues, á que ande la recta *CA*; y por consiguiente al pasar del agua al ayre la razon de refringencia es de 3 á 4. Si se plantan otros alfileres en la linea *CE*, se verán todos en la prolongacion de *AC*, y toda la linea *CE* se vé dentro del agua como si fuese la recta *AC* continuada. Esto prueba que el rayo que viene desde el alfiler *E* anda una linea recta dentro del agua, y se refringe solamente en su superficie. Al contrario, si estuviera el sol á la altura correspondiente para que la sombra del alfiler *A* coincida con *AC*, se reparará que la sombra refringida coincidirá con *CE*.

400 Veamos ahora como se hace la mudanza de direccion en un rayo de luz que padece refraccion. Continuemos figurándonos que el papel ó la tabla donde está trazada la figura esté colocada perpendi-

dicular á la superficie de una agua mansa, y que en Fig.
el punto *C* de su interseccion con *RS* dá un rayo de 141.
luz que se mueve en el ayre en la direccion *AC*. Suponiendo entonces *PCQ* perpendicular á la superficie del agua, y que el rayo que viene por *AC* entra en el agua en *C*, lexos de proseguir su camino se desvía en *C*, y traza una recta *CE*, formando con la perpendicular *CQ* un ángulo *ECQ* menor que el ángulo *ACP*; y *CE* está siempre puesta de tal modo, que si desde *C* como centro se traza un círculo que corte *CA* en *A*, y *CE* en *E*; las perpendiculares *AD*, *EF* tiradas á *PQ* desde los puntos *A* y *E*, están siempre en una misma razon, sea el que fuere el ángulo *ACP*. En el paso del ayre al agua, *EF* siempre es los $\frac{3}{4}$ de *AD*.

401 El rayo *AC* se llama *el rayo incidente*; *CE*, *el rayo refracto ó refringido*; *PCQ*, *la perpendicular de incidencia*; *ACP*, *el ángulo de incidencia*; *ECQ*, *el ángulo de refraccion*; *AD*, *el seno de incidencia*; y *EF*, *el seno de refraccion*.

402 *Si un rayo, despues de refringido, vuelve directamente atrás ácia la superficie refringente hasta encontrar el punto de incidencia, padece otra refraccion que le obliga á seguir la misma direccion que seguía quando vino á dar en la superficie.*

403 *Al pasar de un medio raro á otro mas denso, la refraccion arrima el rayo á la perpendicular, ó, lo que viene á ser lo propio, el ángulo de refraccion es menor que el de incidencia.*

404 *El seno de incidencia* AD, *y el seno de refraccion* EF *están puntualmente, ó con muy corta diferencia por lo menos, en razon constante.*

Y así, si otro rayo *aC* se refringe en la direccion de la recta *Ce*, y tiramos los senos *ad*, *ef*, la razon de *ad* á *ef* será la misma que la de *AD* á *EF*. Quando la refraccion se hace del ayre al agua, hemos visto

Fig. to (400) que el seno de incidencia es al seno de refraccion como 4 á 3, con corta diferencia; al pasar del ayre al vidrio, la razon entre estos senos es como 3 á 2, ó con mas puntualidad como 31 á 20.

405 De la última regla se sacan las consecuencias siguientes. 1.° *Quando el ángulo de incidencia* ACP *crece, el ángulo de refraccion correspondiente* ECQ *crece tambien*; porque si sus senos *AD*, *EF* no creciesen ambos á un tiempo, no subsistiría entre ellos la misma razon. Y así, si el ángulo de incidencia mengua, el ángulo de refraccion padecerá una diminucion correspondiente.

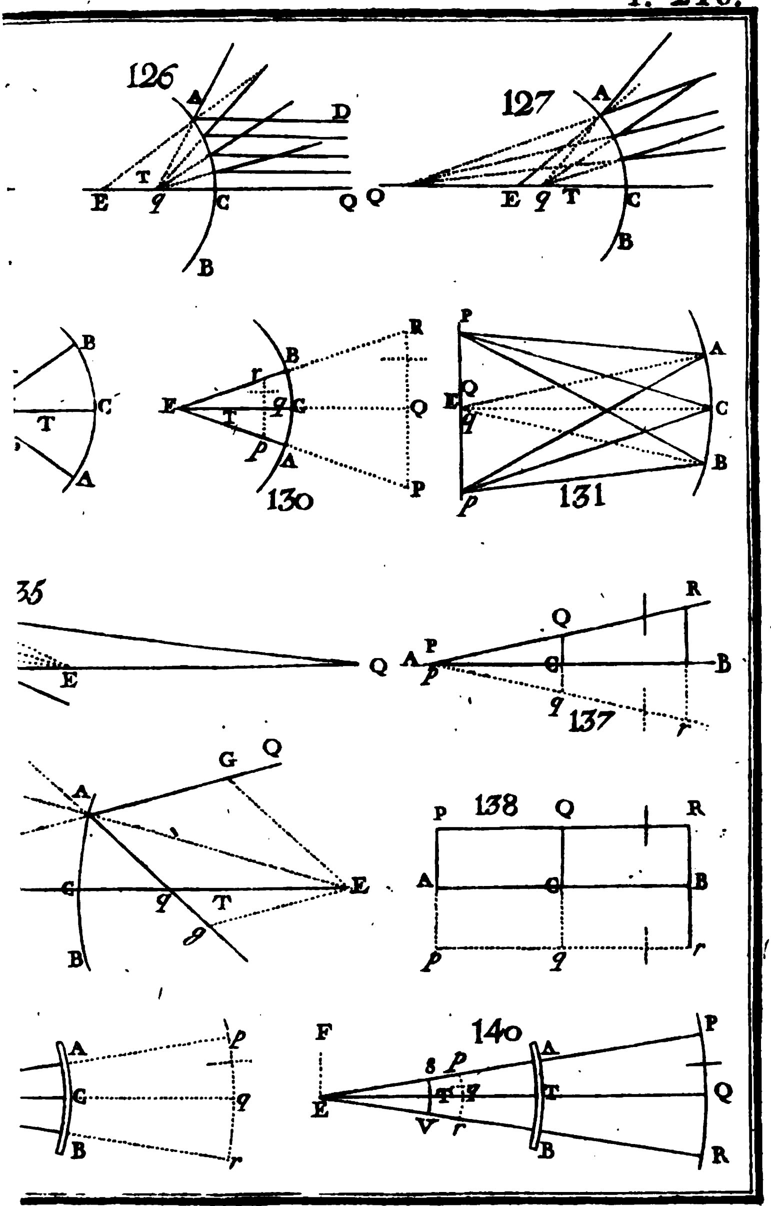
406 2.° *Que quando un rayo dá perpendicular en una superficie refringente, no se desvía, y prosigue su camino en la prolongacion de la perpendicular que seguía quando llegó al punto de incidencia.*

142. 407 3.° *Que la inflexion del rayo refracto es tan-*
143. *to mayor, quanto mayor es el angulo de incidencia.*

408 Representa *QC* una espiga de rayos paralelos que dán oblicuamente en un plano refringente *ACB*. Estos rayos despues de refringidos guardan su paralelismo, pues siendo todos iguales unos con otros los ángulos de incidencia, lo serán tambien los ángulos de refraccion. Por lo mismo, si dichos rayos padeciesen otra refraccion en otro plano inclinado ó paralelo al primero, saldrán tambien paralelos, con tal que sean de un mismo color. Mas adelante se dará la razon de esta restriccion.

144. 409 Los rayos de una espiga *QAB* que vienen
145. divergentes de un punto *Q* para dar en un plano refringente *ACB*, toman, al atravesarle, las mismas direcciones que si vinieran sin rodeo y directamente de otro punto *q* colocado en el rayo *QC* perpendicular al plano.

Porque este rayo atraviesa la superficie sin romperse (406), siendo así que los demas como *QA* es pre-


126
127
130
131
35
137
138
140

preciso que se desvien, y se desvian tanto mas, quanto Fig.
mas apartados están de *C* los puntos donde dán (407), 144.
porque los ángulos de incidencia *QAE*, y por lo 145.
mismo los ángulos de refraccion correspondientes crecen en proporcion (405). Esta es la razon por que todos los rayos refractos divergen con muy corta diferencia de un punto *q* puesto del mismo lado que *Q* respecto de la superficie *AB*.

Si la superficie refringente termina una masa de vidrio, *QC* está con *qC* en la primera figura como 2 á 3, y como 3 á 2 en la segunda. Si termina una masa de agua, *QC* y *qC* están uno con otro en la primera figura como 3 á 4, y como 4 á 3 en la segunda, siguen las razones de refringencia correspondientes á dichos medios (404). Si hiciéramos convergir los rayos incidentes ácia *q*, es patente que despues de la refraccion concurririan en *Q*.

410 Lo que dexamos dicho (383) se aplica fa- 146.
cilmente á la formacion de una imágen *pqr* de un objeto *PQR* por un plano refringente *ACB*, con tener presente que todas las razones de *Ap* á *AP*, de *Br* á *BR* son iguales.

411 Llámase *lente* un vidrio que tiene el uno 147.
de sus lados *EF* plano, siendo el otro *ACB* una por- *hasta*
cion de la superficie de una esfera, ó cuyos dos lados 152.
ACB, *EDF* son porciones de dos superficies de una misma ó de distintas esferas. Suele llamarse *vidrio* no mas.

El exe de una lente ó de un vidrio es una recta que le atraviesa perpendicularmente por su mayor ó menor grueso; pasa por consiguiente por los centros *G*, *H* de sus superficies. El centro de un vidrio está en medio de la porcion *CD* del exe comprehendida dentro del vidrio. La figura 147 representa un vidrio plano convexô; la figura 148, un vidrio plano cóncavo; las figuras 149 y 150 representan la una un vi-

Fig. vidrio convexó, y la otra un vidrio cóncavo por ambos lados; y las figuras 151, 152 dos vidrios cóncavos por un lado, y convexôs por otro: al primero se le llama *menisco.* Conviene tener presente que el grueso *CD* de todos estos vidrios ès generalmente tan corto, que pocas veces se le lleva en cuenta.

153. 412 Un vidrio que tiene la figura de un prisma triangular, se llama *prisma* á secas. Este vidrio mirado directamente por un extremo tiene la figura de un triángulo *ABC.*

153. 413 Quando un rayo *EFGH* se quebranta en los dos lados *AB*, *CB* de un prisma; sale mas ó menos inclinado ácia la parte mas gruesa del prisma, segun sea mayor ó menor el ángulo refringente *ABC*; y como este ángulo es invariable, la refraccion total del rayo es constante en qualquier ángulo que encuentre el prisma, con tal que las refracciones sean pequeñas.

Porque si suponemos primero que el rayo *FG*, considerándole quando atraviesa lo interior del prisma, esté igualmente inclinado á los lados *AB*, *BC* del prisma, es patente por la posicion sola de las perpendiculares á dichos lados en los puntos *F* y *G* que las refracciones que allí padece le inclinan indispensablemente ácia el lado *AC.*

154. Si suponemos ahora que *FG* llegue á tener incli-
155. naciones desiguales respecto de los lados *AB*, *BC*, y se ponga, girando por grados, en la posicion *fg*, es evidente que mientras su inclinacion respecto del lado *AB* mengua, crece respecto del otro lado *BC.* Y así, si suponemos que un rayo siga dicha recta variable *fg*, y llegue á atravesar los dos lados del prisma, se quebrantará mas y mas pasando por el lado *BC*, siendo así que saliendo por el lado *AB*, su inflexion irá siempre menguando; por manera que la refraccion total del rayo, igual á la suma de las re-

refracciones particulares que padece en los lados del Fig.
prisma, se mantendrá con poca diferencia una mis- 154.
ma en todas sus posiciones. Si la recta *fg* prosigue gi- 155.
rando, no solo hasta que el desvío que se hace en *f*
sea nulo, mas tambien hasta que se haga en la otra
direccion ácia el ángulo refringente *B*, entonces hará
que mengüen los incrementos continuos que adquiere
el desvío mayor que se hace en *g*: y por consiguiente
la refraccion total será todavía la misma.

Quando *fg* es perpendicular á *AB*, si el segundo
lado *BC* se arrima gradualmente al primero *AB*, gi- 154.
rando al rededor de *B*, la inclinacion del rayo que
traza *fg* sobre el lado *BC*, y por lo mismo su rodeo
en *g*, irá siempre menguando, y será últimamente
nulo, porque se desvanecerá el ángulo refringente
ABC. Finalmente, si muchos rayos paralelos encuentran
el prisma, saldrán de él tambien paralelos (408).
Luego la cantidad del desvío de un rayo no pende del
mayor ó menor grueso de la parte del prisma que
atraviesa, ni de sus inclinaciones respecto de los lados
del mismo prisma, y solamente es proporcional
á la cantidad del ángulo refringente *ABC*, tanto mas
cabalmente, quanto mas agudo fuere este ángulo, y
fueren menores las refracciones de sus lados.

414 Por la misma razon, quando un rayo *EFGH* 156.
atraviesa una lente convexa ó cóncava cerca de sus 157.
bordes, ó una esfera á alguna distancia de su centro, 158.
se desvía en su emersion, de su primer rumbo, inclinándose
ácia el mayor grueso del vidrio; porque las
refracciones en *F* y *G* son las mismas que si el rayo
encontrara dos planos *FA*, *GC* tangentes de la superficie
esférica en *F* y *G*; y por consiguiente podemos
considerar las superficies de los vidrios como que tienen
la misma inclinacion que los lados del prisma.

415 Síguese de lo que acabamos de decir (413
y 414) que quanto mas cerca del centro atraviesa un
ra-

Fig. rayo un vidrio, tanto menos se aparta de su direccion
159. al salir; que si pasa por el centro, su parte incidente
160. y emergente son paralelas, ó forman una misma linea
161. quando el rayo coincide con el exe del vidrio. A medida que el rayo *FG* se arrima al centro del vidrio, el ángulo que forman los planos tangentes *FA*, *GC*, mengua, y se desvanece por último, quando llegan á ser paralelos.

416 Quando una espiga de rayos dá en un vidrio, el rayo que pasa por el centro del vidrio se llama *el exe de dicha espiga*. Y como sus partes incidente y emergente *EF*, *GH* no forman mas que una misma linea, ó dos lineas paralelas (415), podremos considerar este rayo, en todo el trecho que anda, como una linea recta, de la qual no discrepa sensiblemente quando es tan corto el grueso del vidrio, que se puede despreciar, y no dá en él la espiga con sobrada oblicuidad. Porque las paralelas *EF*, *GH*, prolongadas, se arriman mas á medida que la recta *FG* es mas corta, y el rayo menos quebrantado en *F* y *G*.

162. 417 *Las refracciones totales de los rayos como* EFGH, efgh *que atraviesan una esfera á iguales distancias de su centro, son iguales.*

Porque como en este caso son iguales las cuerdas *FG*, *fg*, están igualmente inclinadas á la superficie de la esfera, y por consiguiente las refracciones del rayo *EFGH* en *F* y *G* son iguales, tomándolas juntas y separadamente, con las del rayo *efgh* en *f* y *g* (413 y 414); así, el ángulo que forman las partes incidente y emergente de un rayo qualquiera, prolongadas hasta que se encuentren, es igual con el ángulo que forman las partes incidente y emergente de otro rayo, tambien prolongadas hasta que se encuentren; y esto queremos dar á entender quando decimos que su refraccion total es igual.

Hay

418 *Hay tambien igualdad entre las refracciones totales de los rayos* EFGH, efgh *que se cortan en un punto dado de una lente, ó que la atraviesan á distancias iguales de su centro; con tal sin embargo que su incidencia no tenga oblicuidad sobrado grande.* Fig. 163. 164.

Figurémonos en el vidrio una linea *FG* al principio igualmente inclinada respecto de sus lados, y que despues gire un poco al rededor de uno de sus puntos, hasta llegar á la posicion *fg*; es evidente que al paso que se vá inclinando mas al uno de los lados *Ff* del vidrio, se inclina menos al otro lado *Gg*; y que por consiguiente un rayo que siguiese la recta variable *fg*, atravesará los dos lados de la lente, y el desvío que padecerá al salir por el lado *Ff* irá creciendo mas y mas, siendo así que el que padece saliendo por el otro lado *Gg*, irá menguando; por manera que la refraccion total del rayo, igual á la suma de sus refracciones particulares, se mantendrá con corta diferencia la misma en todas sus situaciones (413). Se puede proseguir haciendo que la recta *fg* dé vueltas al rededor del punto que ya le sirvió de centro de rotacion, no solo hasta hacer que sea nulo el desvío en *g*, sino tambien hasta que se haga en direccion contraria; entonces quita los incrementos continuos que adquiere el desvío mayor que padece en *f*, y mantiene en la refraccion total la misma cantidad. Para que esta refraccion se mantenga la misma, basta sola la circunstancia de que los rayos *FG*, *fg* atraviesen la lente á distancias del exe las mas iguales que posible sea, pues no puede haber mudanza en la refraccion total sino en quanto la hay en dicha distancia (413), porqué solo en este caso los planos tangentes que consideramos como que forman el ángulo refringente de un prisma, mudan de inclinacion.

Quan-

Fig. 419 Quando una espiga considerable de rayos
165. paralelos dá directamente, ó con poca oblicuidad,
166. en la superficie de un vidrio mas grueso en medio
167. que en sus bordes, la refraccion siempre dirige los rayos emergentes ácia el que pasa por el centro del vidrio. Por el contrario, los desvía del mismo rayo, quando el vidrio es mas grueso ácia sus bordes que en medio (414). Y como á distancias iguales al rededor del centro, los rayos se desvian igualmente en todos estos vidrios, y á medida que estas distancias son mayores, se desvían mas, los rayos emergentes convergen con poca diferencia ácia un punto F del rayo que pasa por el centro, quando el vidrio es convexô; divergen al contrario de dicho punto ú otro parecido F, quando es cóncavo.

420 Quando unos rayos paralelos van á dar, siguiendo rumbos encontrados, en las dos superficies de una lente, las distancias de sus focus al centro de la lente son iguales, ora sean ambas curvas dichas superficies y de esfericidades desiguales ó iguales, ora sea la una de ellas plana y la otra esférica.

Porque dos rayos qualesquiera que vienen directamente opuestos uno á otro, ó que distan igualmente de los exes de las espigas cuyos son, encuentran el vidrio á distancias iguales de su centro, donde se rompen igualmente, y ván por consiguiente á encontrar el exe á distancias iguales EF, Ef del centro del mismo vidrio.

Quando unos rayos dán en un vidrio paralelos á su exe, sus focus F y f, se llaman *focus principales*, ó solamente *focus* de dichos vidrios, y el intervalo EF ó Ef se llama *su distancia focal*.

168. 421 Es evidente que los rayos que saliendo del
169. focus F ván á dar en el vidrio convexô, ó plano
170. convexô cuyo es, ó que encuentran un vidrio cón-

ca-

cavo con direcciones dirigidas á su focus *F*, salen Fig.
paralelos al exe de la espiga *FE*. Luego si supone- 168.
mos que el punto *F* de donde vienen actualmente 169.
los rayos incidentes, ó ácia el qual se dirigen, se 170.
aparte del vidrio, y pase, v. gr. á *Q*, los rayos,
despues de su *emersion* ó salida, tendrán su focus *q*
del otro lado del vidrio, bien concurran con efecto
en dicho punto, bien solo concurran sus prolonga-
ciones. Pero si *Q* estuviese mas cerca del vidrio que 171.
F, el focus *q*, real ó virtual de los rayos emer- 172.
gentes; estará del mismo lado que *Q*; porque en to- 173.
das estas direcciones diferentes que les damos succe-
sivamente á los rayos incidentes, siempre son igual-
mente quebrantados, con tal que no varíen sus dis-
tancias respectivas al centro del vidrio (417 y 418).
Por consiguiente, *si el uno de los dos puntos* Q, q *se mueve en el exe de la espiga; el otro irá del mismo lado.* Si el vidrio estuviere entre el punto *Q* y su focus *q*, *á medida que el uno se le acercare, el otro se apartará*; si están de un mismo lado del vidrio, *ambos se arrimarán ó apartarán*, y se arriman tanto mas uno á otro, quanto mas se le acercan; hasta que coincidiendo finalmente el uno con la superficie del vidrio, el otro coincide tambien con ella, ó muy poco falta; debiéndose entender todo esto en el supuesto de ser muy delgado el vidrio, y de darle los rayos muy cerca del exe. Por no concurrir la primera de estas dos circunstancias, dichos puntos no pueden dar en la superficie de una esfera, por estar apartados uno de otro los puntos de incidencia y emersion.

422 Como cada uno de los puntos *Q*, *q* se puede tomar por el punto que despide los rayos, y el otro por su focus real ó virtual, suelen llamarse ambos *focus correspondientes*.

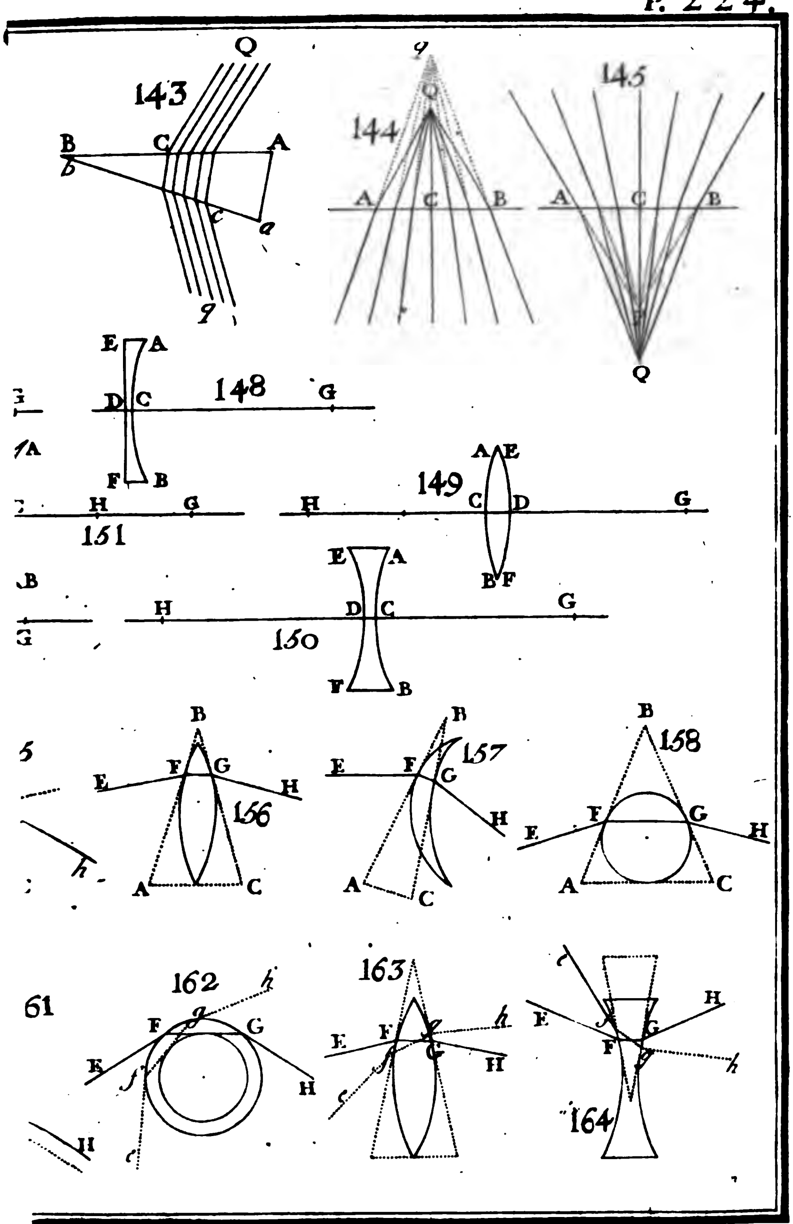
423 Las propiedades de las superficies y vidrios cón-

Fig. cóncavos son las mismas que las de los convexos, como es facil de comprobarlo con imaginar que los rayos siguen direcciones opuestas en las mismas lineas prolongadas, y con mudar, segun los casos, su convergencia en divergencia, ó su divergencia en convergencia, conforme va pintado en las figuras.

174. 175. 176. 424 *Si diferentes puntos* Q, R *que envían rayos á la superficie de un vidrio, ó ácia la qual se encaminan rayos que ván á dar en dicha superficie, están á distancias iguales qualesquiera de su centro, los rayos emergentes tambien tendrán sus focus* q y r *á distancias iguales del mismo centro, en las rectas* EQ, ER *prolongadas, con tal que los rayos no dén con demasiada oblicuidad en el vidrio.*

Tomemos en el vidrio un punto qualquiera *A*, poco distante del exe *Qq* que traza el rayo que vá desde el punto *Q* á su focus *q*, y tírese la recta *AE*; si nos figuramos que la figura *QAEq* gire un poco al rededor del centro *E*, y llegue á la situacion *RBEr*, los extremos de las rectas *EQ*, *EA*; *Eq* trazarán arcos pequeños *QR*, *AB*, *qr*, cuyo centro comun estará en *E*. Si saliendo entonces de *R* otro rayo, ó dirigiéndose ácia *R* pasa por *B*, en virtud de la refraccion que padecerá al entrar en el vidrio, saldrá dirigido al punto *r*, bien concurra en dicho punto con el exe de la espiga que corresponde á *R*; bien solo concurra allí mismo su prolongacion. Porque dos rayos *QAq*, *RBr* que atraviesan el vidrio á distancias iguales *AE*, *BE* de su centro, padecen igual desvío (417 y 418). Es evidente que los demas rayos procedentes de *R*, ó que se encaminan ácia *R*, tambien tendrán su focus real ó virtual en el mismo punto *r*, por estar dicho punto en el exe de la espiga (419).

425 Luego las espigas de rayos paralelos que no dán con mucha oblicuidad en el mismo lado, ó en los


143
144
145
148
149
150
151
156
157
158
162
163
164

los lados opuestos de un vidrio, sea el que fuere, Fig.
siempre tienen sus focus á distancias iguales de su 176.
centro. Porque lo dicho poco ha (425) tambien 177.
se aplica al caso en que las distancias EQ, ER llegan á ser infinitas, y este es el caso de los rayos paralelos.

426 Luego si en el supuesto de ser dado el pun- 178.
to radiante Q, quisiéramos determinar el focus ó pun- 179.
to de reunion q de los rayos emergentes, ó de sus prolongaciones; tiraríamos desde luego el exe QE del manojo, trazaríamos desde el centro E, y con el radio EF igual á la distancia focal del vidrio hallada prácticamente, conforme enseñarémos despues, el arco FG que encuentra en algun punto G uno de los rayos incidentes QA; tirando despues la EG y su paralela Aq, el punto q donde esta paralela cortare el exe del manojo será el focus que se busca.

Porque, si suponemos que ademas del rayo GA haya otros que salgan del punto G, ó se encaminen ácia él, todos ellos saldrán paralelos á su exe GE prolongado (423).

427 Tambien se puede considerar la refraccion 180.
de un manojo de rayos que atraviesan unos vidrios 181.
de qualquiera figura, y averiguar su punto de con- 182.
curso del modo siguiente. La refraccion en la primer superficie AB les dá á los rayos nuevas direcciones en virtud de las quales concurririan ellos ó sus prolongaciones en un punto T, si no padecieran refraccion ninguna en la segunda superficie. Si consideramos este punto como que envía rayos á dicha superficie, es evidente que la refraccion que en ella padecen, los encamina todos á un punto F, el qual es cabalmente el focus que se busca. Sea Q v. gr. el punto
que envía rayos á un prisma, y sea QC perpendicu- 183.
lar á su primer lado AB. Si prolongamos QC la cantidad QT igual á su mitad, será T el focus de los ra-

 yos

Fig. yos *QA*, *QB* &c. despues de su refraccion en la su-
183. perficie *AB* (409); y como los rayos incidentes en
los puntos *a* y *b* de la segunda superficie *ab*, se pue-
den considerar como procedentes de dicho punto, si
de *Tc* perpendicular á *ab* se quita una parte *Tq*, que
sea su tercio, los rayos emergentes prolongados con-
currirán en el punto *q*, el qual será por lo mismo
su focus (409).

Luego si el ángulo refringente de un prisma tiene
poca abertura, y los rayos son poco refringidos, el
punto de donde salen los rayos incidentes, y el focus
de los rayos emergentes siempre están á distancias
con corta diferencia iguales del prisma. Porque en
este caso son iguales, con muy corta diferencia, las
perpendiculares *TC*, *Tc*; y en el vidrio *QC* y *Qc* son
respectivamente sus dos tercios.

184. Luego quando los planos *AB* y *ab* son paralelos,
TC y *Tc* coinciden; y *Qq* es el tercio de *Cc* ó grueso
del vidrio.

185. 428 Una imagen *pqr* formada por un vidrio ter-
186. minado por planos *AB*, *ab* paralelos, es derecha, pa-
ralela é igual al objeto *PQR*, está al mismo lado del
vidrio que el objeto, y un tercio del grueso de dicho
vidrio mas cerca de él. Porque dexamos dicho que
los focus *p*, *q*, *r* de cada uno de los manojos que
salen de los puntos *P*, *Q*, *R* están mas cerca de él
dicha cantidad, y que dichos focus están en las rec-
tas *PA*, *QC*, *RB* tiradas desde cada punto del obje-
to perpendicular al vidrio.

429 La imagen que forma un prisma siempre es
derecha é igual al objeto; y uno y otra siempre es-
tán á un mismo lado y á distancias iguales de dicho
prisma, con tal sin embargo que los rayos sean poco
refringidos, y que el ángulo del prisma sea poco
187. abierto. Supongamos que dos rayos *PE*, *QE* proce-
dentes de las extremidades del objeto, pasen por un

pun-

punto *E*, tan inmediato al vértice del ángulo refrin- Fig.
gente, que se puedan considerar como nulas las dis- 187.
tancias de sus puntos de incidencia y de emersion. Una vez que los desvíos totales de los rayos *PEM*, *QEO* son iguales (413), se cortarán estos rayos formando el ángulo *PEQ* igual al ángulo *NEO* ó al ángulo *pEq* que forman los rayos emergentes prolongados del lado del objeto; y por ser la distancia *Ep* del focus *p* del manojo perteneciente al punto *P*, igual á *EP* (383), la distancia *Eq* del focus *q* tambien será igual á *EQ*, y por consiguiente la imágen *PQ* es derecha, igual con el objeto, y está del mismo lado del prisma, á la misma distancia que el objeto.

430 Las figuras manifiestan como se forma la 188.
imágen de un objeto por diferentes manojos refrin- *hasta*
gidos al atravesar un vidrio de qualquiera figura. Co- 196.
mo los exes *PEp*, *QEq*, *REr* de dichos manojos pasan sin romperse por el centro del vidrio, las propiedades de estas imágenes son las mismas que las de las imágenes formadas por las superficies reflectentes ó refringentes simples de las quales hemos hablado (383 y sig. y 410). No hay mas diferencia sino que la imágen de un objeto que toca una esfera, no coincide con el objeto en la superficie de dicha esfera, y se queda á alguna distancia por la razon apuntada (421). La teórica nos enseña que la imágen de un arco de círculo es con poca diferencia circular (424), y que quando se trata de un objeto chico colocado á una distancia considerable del vidrio, cuya imágen debe ser por lo mismo muy pequeña, su figura y la de su imágen no discrepan sensiblemente, ora se consideren ambas como arcos de círculo, ora se consideren como lineas rectas. Particularmente si atendemos á que los rayos de un manojo no concurren puntualmente en un punto único

Fig. del exe, y se encuentran en muchos puntos que componen una parte sensible del mismo exe.

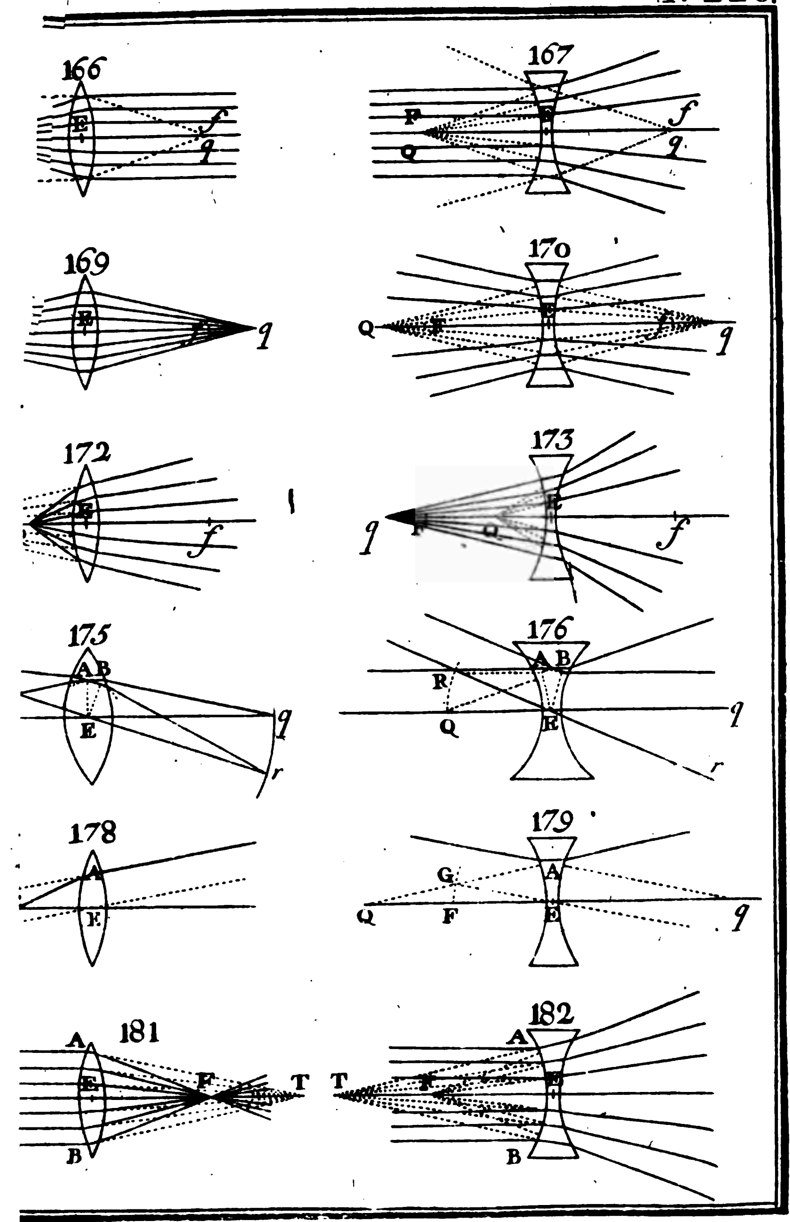
431 Ya se vé que quando unos rayos caen sobre la superficie tosca y desigual de algun cuerpo opaco ó transparente, no son reflectivos ni refringidos con la regularidad que lo serian por superficies perfectamente iguales y bruñidas, y que se desparraman por diferentes partes, sin guardar orden ninguno, ni seguir direccion determinada.

Determinacion del focus de los rayos que dán casi perpendiculares en una superficie refringente.

432 Una vez que los lados de los triángulos son proporcionales á los senos de los ángulos opuestos (I. 731), y los senos de arcos ó ángulos pequeños no se distinguen de sus mismos arcos ó ángulos, han de ser estos ángulos como sus senos. Por consi-
197. guiente *los ángulos pequeños* BAC, BCE *subtensos por la misma perpendicular* BE, *son reciprocamente como sus lados* BA, BC, *ó* EA, EC. Porque el ángulo *BAC* es al ángulo *BCE*, quando son muy pequeños, como el seno de *BAC* es al seno de *BCE*, ó como *BC* es á *BA*, ó como *EC* es á *EA*.

198. 433 *Supongamos que sea* ACB *un plano refringen-*
hasta *te*; Q, *el punto de donde salen los rayos incidentes,*
201. *ó ácia el qual se encaminan*; *y* QC, *perpendicular al mismo plano. Si del mismo lado de este plano donde está* QC, *determinamos en la expresada perpendicular un punto* q, *tal que* qC *sea á* QC, *como el seno de incidencia al de refraccion, será* q *el focus de los rayos refractos.*

Si *QA* y *Aq*, prolongadas como se vé en las figuras, representan la una un rayo incidente, la otra un rayo refracto, que vá á dar en algun punto *q* de *QC*; el ángulo *AQC* será igual al ángulo de incidencia,


166
E
f
q
167
F
Q
E
f
q
169
E
f
q
170
Q
F
E
f
q
172
E
f
173
q
F
Q
E
f
175
A
B
E
q
r
176
A
B
R
Q
E
q
r
178
A
E
179
A
G
Q
F
E
q
181
A
E
F
T
B
182
T
A
F
E
B

dia, y *AqC* al ángulo de refraccion. Por consiguiente Fig.
el seno de incidencia será al seno de refraccion, co- 198.
mo *Aq* á *AQ* (432); y por lo mismo como *Cq* á hasta
CQ, quando *QA* es con muy corta diferencia per- 201.
pendicular al plano *AB*.

434 *Si fuese* ACB *una superficie esférica refrin-* 202.
gente cuyo centro es E, *y fueren los rayos incidentes,* hasta
como DA, *paralelos á un radio qualquiera* CE; *tó-* 205.
mese en este radio, prolongado del lado adonde se encamina el rayo, ó en direccion contraria, segun fuere el medio denso, convexô ó cóncavo, la CT *que sea á* CE *como el seno de incidencia es á la diferencia que vá de este seno al seno de refraccion; será* T *el focus de los rayos refractos.*

Sea *AT* el rayo refracto ó su prolongacion, que encuentre en algun punto *T* el radio *CE* prolongado; por ser el radio *EA* perpendicular en *A* á la superficie refringente, el ángulo de incidencia será igual al ángulo *AEC*, y el ángulo *EAT* será el ángulo de refraccion ó su suplemento. Por consiguiente el seno de incidencia es al seno de refraccion, como *AT* es á *TE* (432), y por lo mismo como *CT* es á *TE*, quando el punto de incidencia *A* está infinitamente cerca de *C*, y son por consiguiente los rayos incidentes casi perpendiculares á la superficie. Luego el seno de incidencia es á la diferencia que vá del mismo seno al seno de refraccion, como *CT* es á *CE*.

435 Luego 1.° *CT* es á *TE* como el seno de incidencia es al seno de refraccion.

436 2.° Si los rayos incidentes salieren de *T* ó se encaminaren á *T*, los rayos refractos serán paralelos á *TE*.

437 *Si unos rayos paralelos dán en una esfera* 206.
de una densidad mayor ó menor que la del medio am- 207.
biente, y su focus, despues de su primera refraccion

 al

Fig. *al entrar en la esfera, está en* T, *en el diámetro* CD
206. *prolongado y paralelo á los rayos incidentes como* QA;
207. *su focus al salir de la esfera despues de haber padecido otra refraccion, estará en medio* F *de la recta* TD.

Supongamos que los rayos incidente y emergente *QA*, *FG* prolongados, se encuentran en *H*, y tírese la cuerda *AG* que representa el camino del rayo en lo interior de la esfera; una vez que las refracciones en *A* y *G* son iguales (417), y *AH* y *FT* paralelas, los triángulos *AHG*, *GFT* son semejantes é isósceles. Luego si el punto *A* se acerca á *C*, y llega á confundirse con él, el punto *G* caerá en *D*, y el triángulo *GFT* se desaparecerá; por consiguiente *GF* llegará á ser igual á la mitad de *GT*; ó, lo que es lo mismo, *DF* será igual á la mitad de *DT*.

208. 438 *En toda lente convexá ó cóncava siempre hay*
hasta *un punto* E, *tal que cada rayo que por él pasare, se-*
211. *guirá al salir de la lente un rumbo* aq *paralelo al rumbo* QA *de su incidencia. En una lente planoconvexá, ó planocóncava, dicho punto está en el vértice de la superficie curva, y en los meniscos está á la parte de afuera, del lado de la curvatura mayor.*

Sea *REr* el exe de la lente que junta los centros *R* y *r* de sus superficies *A*, *a*. Tírense dos qualesquiera de sus radios *RA*, *ra* paralelos uno con otro que junten los puntos *A*, *a*; la recta *Aa* cortará el exe en el punto *E* que hemos dicho. Porque ya que los triángulos *REA*, *rEa* son semejantes, *RE* y *Er* están en la razon dada de los radios *RA*, *ra*, y por consiguiente el punto *E* es invariable en cada lente.

Supongamos ahora que sea *Aa* el camino de un rayo en lo interior de una lente; como está entonces igualmente inclinado respecto de las perpendiculares á la superficie, las refracciones que padece al

sa-

salir son iguales, y sus partes emergentes *AQ*, *aq* Fig.
por consiguiente paralelas. Luego si un rayo dá en 208.
una lente siguiendo una direccion *QA*, tal que des- *hasta*
pues de refringido al entrar, pase por el punto *E*, 211.
saldrá en una direccion *aq* paralela á la de su incidencia. Si la una de las superficies de la lente fuese plana, y la otra convexâ ó cóncava, el uno de los radios *RA* ó *ra* será infinito, y por consiguiente paralelo al exe de la lente, y el otro radio se confundirá con el exe, por manera que *A* ó *a* coincidirá con *E*.

439 Síguese de aquí, que quando una espiga de rayos dá casi perpendicular en una lente que tiene poco grueso, el rumbo que sigue el rayo que entra por el punto *E*, se puede tomar, sin error sustancial, por una linea recta que pasa por el centro de la lente. Porque de la longitud de *Aa*, y la cantidad de las refracciones que se hacen en sus extremos, se evidencia que la distancia perpendicular entre *AQ*, *aq* prolongadas, menguará con el grueso de la lente y la oblicuidad del rayo.

440 Cuestion I. *Determinar el focus de los rayos paralelos que dán con muy corta diferencia perpendiculares en una lente dada.*

Sea *E* el centro de la lente; *R* y *r*, los centros 212.
de sus superficies; *Rr*, su exe; *gEG*, una paralela á *hasta*
los rayos que dán en la superficie *B*, cuyo centro 217.
está en *R*. Tírese el radio *BR* paralelo á *gE*, en cuya prolongacion sea *V* el focus de los rayos despues de su primer refraccion al atravesar la superficie *B*; tirando despues la *Vr*, que corta *gE* prolongada en *G*, será *G* el focus de los rayos despues de salidos de la lente.

Porque si miramos *V* como un punto de donde salen rayos que ván á dar en la segunda superficie *A*, estos rayos han de tener su focus, despues de atra-

Fig. 212. hasta 217. vesarla, en algun punto del rayo que atraviesa la misma superficie en linea recta, esto es en la linea Vr tirada por su centro r. Pero como este focus es con evidencia el mismo que el focus que buscamos de los rayos que dan en la superficie B, despues de atravesar la lente, tambien ha de estar en algun punto de aquel de dichos rayos, que miramos como que no se desvía (409), y cuyo camino entero se puede tomar por consiguiente por una linea recta gEG (416). Luego la interseccion G de las dos rectas gEG y Vr es el focus que se busca. De esta resolucion resulta

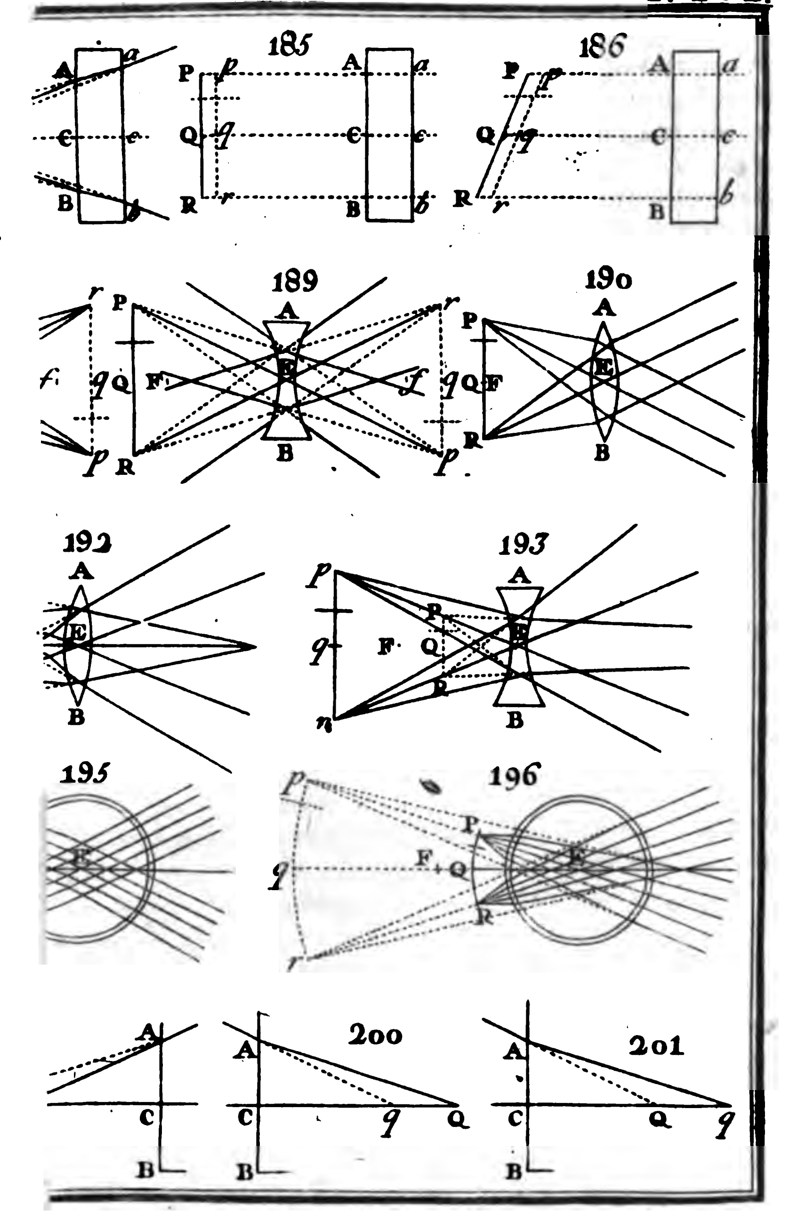
441 1.° Que si los rayos incidentes fuesen paralelos al exe Rr, la distancia focal EF será igual con EG.

Porque si los rayos incidentes paralelos á gE se inclinan mas y mas al exe hasta ser paralelos con él, su primer y segundo focus V y G trazarán arcos VT y GF, los quales tendrán sus centros en R y E; porque como está RV con RB en la razon dada del menor de los senos de incidencia y de refraccion á su diferencia (434), es invariable; por consiguiente GE es tambien invariable, por estar con RV, que tambien lo es; en la razon dada de rE á rR, pues son semejantes los triángulos EGr, RVr.

442 2.° De la misma proporcion sacamos la regla siguiente *para determinar la distancia focal de una lente delgada.*

El intervalo Rr de los centros de las superficies es al radio rE de la segunda superficie, como la prolongacion RV ó RT del radio de la primer superficie hasta el focus de los rayos refringidos por dicha superficie, es á la distancia focal GE ó FD de la lente, la qual ha de estar del mismo lado que los rayos emergentes, ó del lado opuesto, segun fuere la lente mas ó menos gruesa en su medio que en sus bordes.

443 3.° Por consiguiente, quando unos rayos para-


185
186
189
190
192
193
195
196
200
201
A
a
C
c
B
b
P
p
Q
q
R
r
E
F
f

ralelos dán en los dos lados de una lente, las distancias focales EF, Ef son iguales. Fig. 212. hasta 217.

Porque si es rt la prolongacion del radio Er, hasta el primer focus t de los rayos que caen paralelos en la superficie A; la misma regla que dá Rr es á rE como RT es á EF, dá tambien rR es á RE como rt es á Ef. Pero el rectángulo de rE y RT es igual al rectángulo de RE y rt, porque rE tiene con rt, y RE con RT la misma razon dada (434); luego Ef y FE son iguales.

444 4.° En una lente de vidrio convexá ó cóncava por ambos lados, la suma de los radios de las superficies ó su diferencia en un menisco, es al uno de ellos, como el duplo del otro es á la distancia focal.

Porque las prolongaciones RT, rt de los radios son duplas de los mismos radios, pues en el vidrio $ET:TR$ y $Et:tr$ :: 3 : 2 (404 y 435).

445 5.° Por consiguiente, si los radios de las superficies del vidrio fuesen iguales, la distancia focal de dicho vidrio será igual al uno de dichos radios; y tambien será igual á la distancia focal de un vidrio plano convexô ó planocóncavo, cuyo radio fuese otro tanto menor.

Porque considerando el lado plano del expresado vidrio como que tiene un radio infinito, la primera razon de la última proporcion se puede tomar por una razon de igualdad.

446 Cuestion II. *Dado el punto de donde salen, ó al qual se encaminan rayos que dán en una simple superficie, en una esfera ó en una lente, hallar el foous de los rayos emergentes.*

Sea Q el punto de donde salen ó al qual se encaminan los rayos que ván á dar en una superficie esférica, en una lente ó en una esfera cuyo centro es E; y sean otros rayos que vienen paralelos á la linea QEq en direccion opuesta á la de los rayos dados, cuyo 218. hasta 223.

fo-

Fig. focus sea F. Si tomamos $Ef = EF$ en la lente ó esfe-
218. ra, y tomamos $Ef = CE$ en una simple superficie,
hasta haremos $QF : FE :: Ef : fq$, y colocando fq respec-
223. to de f en direccion contraria á la de FQ respecto de F, el punto q será, sin error substancial, el focus de los rayos refractos, con tal que el punto Q no esté tan apartado del exe, ni las superficies sean tan anchas, que algunos de los rayos las hieran con sobrada oblicuidad.

Para probarlo, desde el centro E, y con los radios EF, Ef trácense los dos arcos FG, fg que corten un rayo qualquiera $QAaq$ en G y g, y tírense las EG y Eg; si hecho esto, suponemos que sea G un punto del qual salen rayos como GA, los rayos emergentes como agq serán paralelos á GE (436, 441 y 443), y tomando tambien g por un punto radiante que arroja rayos ga, los rayos emergentes como AGQ serán paralelos á gE. Por lo qual, los triángulos QGE, Egq serán semejantes, y por consiguiente $QG : GE :: Eg : gq$, cuya proporcion se transforma, quando el rayo $QAaq$ está muy inmediato á QEq, en $QF : FE :: Ef : fq$ (II. 515). Ahora bien, quando Q se acerca á F, y llega á confundirse con él, los rayos emergentes son paralelos; quiero decir, que q se aparta á una distancia infinita; y por consiguiente, quando Q pasa al otro lado de F, el focus q pasa al otro lado de F, á una distancia al principio infinita, la qual va despues menguando al paso que Q se aparta de F.

218. 447 Luego 1.° Quando los rayos no han de atra-
219. vesar mas que una superficie AC, el focus q se puede tambien hallar por medio de esta proporcion $QF : FC :: Cf : fq$; porque FC y Ef son iguales, del mismo modo que FE y Cf (435).

448 2.° Tambien se puede hallar con hacer estotra proporcion $QF : QE :: QC : Qq$, y colocando Qq de

de manera que estas quatro lineas estén todas de un mismo lado respecto del punto Q, ó dos de cada lado. Porque los triángulos QGE, QAq son semejantes, y dán $QG : QE :: QA : Qq$. Fig. 218. 219.

449 3.° En una esfera ó lente se puede hallar el focus por medio de esta proporcion $QF : QE :: QE : Qq$, y colocando Qq del mismo lado de Q que QF. 220. hasta 223.

Porque, si prolongamos el rayo incidente QA, y el rayo emergente qa hasta que ambos concurran en e, los triángulos QGE, Qeq serán semejantes, y darán $QG : QE :: Qe : Qq$; pero si los ángulos de estos triángulos llegaren á ser nulos, el punto e coincidirá con E, porque en la esfera el triángulo Aea es isósceles, y por consiguiente Ae y ae llegan á ser radios de la esfera. En una lente el grueso Aa es muy pequeño.

450 4.° En todos los casos la distancia fq varía recíprocamente como FQ; porque el producto de EF por Ef, que son los términos medios de las proporciones precedentes, es constante, y siempre están dispuestas al reves respecto de f y F.

451 5.° Si lentes convexás de una misma distancia focal se ponen delante y á la misma distancia de un punto radiante, los rayos que arroja dicho punto tendrán su focus á la misma distancia de las lentes; por manera que si se colocasen succesivamente en el mismo sitio, el focus siempre estaría en un mismo punto. Porque las proporciones precedentes solo penden de la distancia focal de la lente, y no penden en manera alguna de la razon que hay entre los radios de dichas superficies.

452 6.° La proporcion por la qual se determina el focus de una esfera de densidad uniforme, tambien sirve para determinar el focus de una espiga de rayos refringidos por un número de superficies concéntricas, que separan medios uniformes de diferentes densidades.

Por-

Fig. Porque si unos rayos caen paralelos á una linea
218. qualquiera tirada por el centro comun de dichos me-
hasta dios, y son quebrantados por todos ellos, la distan-
223. cia de su focus á dicho centro es invariable, del mismo modo que en una esfera de densidad uniforme.

453 7.º Quando los puntos Q y q están del mismo lado de las superficies refringentes, si los rayos incidentes vinieren de Q, los rayos refractos irán del lado opuesto á q, y divergirán respecto del último punto; y si Q fuere solamente el punto de concurso de los rayos incidentes, los rayos refractos irán ácia q; lo contrario sucede quando los puntos Q y q están en distintos lados de las superficies refringentes.

Determinacion del lugar y situacion de las imágenes formadas por rayos refractos.

224. 454 *Las imágenes que forman rayos refringidos*
225. *por superficies planas, son parecidas á los objetos, y están siempre derechas ó en una situacion parecida á la de los objetos, y del mismo lado respecto de los planos refringentes.*

Sea PQR un objeto que envía rayos á un plano refringente ACB; tírense á este plano las perpendiculares PA, QC, RB &c. en las quales se tomarán Ap, Cq, Br que tengan con AP, CQ, BR la misma razon que el seno de incidencia con el de refraccion (433). Los puntos p, q, r formarán una imágen parecida al objeto, y en una situacion semejante, estando las partes pq, qr en la misma razon que PQ, QR. En esto no hay duda quando el objeto es paralelo al plano refringente; y quando fuere inclinado, se echa de ver que el objeto y la imágen, prolongándolas, encontrarian el plano en el mismo punto D; y por consiguiente como AP, CQ, BR son paralelas, tenemos $pq : qr :: PQ : QR$. Asimismo, si los

204

205

206

207

210

211

213

215

217

los rayos cuyos focus están en p, q, r fueren refringidos otra vez por otro plano paralelo ó inclinado al primero AB, sus segundos focus formarán otra imágen parecida á la primera, y por lo mismo parecida al objeto, y así prosiguiendo. Fig. 224. 225.

455 *Si consideramos un arco de círculo* PQR *trazado desde el centro* E *de una superficie esférica, de una esfera ó de una lente, como un objeto, su imágen* pqr *será un arco concéntrico semejante cuya longitud estará con la longitud del objeto en la misma razon que sus distancias al centro comun* E, *y la imagen estará derecha ó trastornada respecto del objeto, segun estuviere del mismo lado respecto del centro, que el objeto, ó al otro lado.* 226. hasta 229.

Solo con mirar la primera de las figuras que citamos se manifiesta la evidencia de esta proposicion en todos los casos de refracciones causadas por superficies concéntricas, estando las partes de estas superficies expuestas del mismo lado á las partes del objeto concéntrico á las mismas superficies. Y en una lente los focus de todas las espigas de rayos paralelos están tambien en un arco concéntrico GFH. Y así, siendo Pp y Qq terceras proporcionales, la una á PG y PE, la otra á QF y QE (449), serán iguales, pues $PG = QF$, y $PE = QE$, y por consiguiente la imágen pqr tambien será un arco concéntrico. Pero una vez que miramos los exes de las espigas como lineas rectas que pasan por E (439), los ángulos pER, PER son iguales; por consiguiente la razon entre la imágen y el objeto es la misma que la de sus distancias al centro E. Finalmente se echa de ver que segun estuvieren la imágen y el objeto del mismo lado respecto del centro, ó de distintos lados, la imágen estará derecha ó trastornada.

456 Luego un objeto circular muy pequeño respecto de su distancia al centro E, se arrima mucho

á

Fig. á tener la figura de una linea recta, y lo propio decimos de su imágen que les es parecida. Luego la imágen de un objeto chico recto, pongo por caso de una linea recta muy corta, puesto á una distancia considerable del centro de una superficie refringente, de una lente ó de una esfera, se puede considerar como una linea sensiblemente recta.

Experimentos Dióptricos.

457 Experimento I. *Para averiguar la distancia focal de una esfera refringente de agua ó de vidrio.*

230. Teniendo prevenida una bola de vidrio, hágase en un pedazo de papel de estraza un agugero de cerca de una pulgada de diámetro, y encólese en la superficie de la bola, y llénesela de agua. Póngase despues vuelto ácia el sol el lado de la bola en que está pegado el papel, de modo que dando perpendiculares los rayos en el agugero puedan pasar por medio del agua; los rayos convergentes se juntarán en el focus á una distancia de la bola *igual al radio del globo*, conforme se puede verificar, haciendo que los rayos refractos vayan á dar en un papel blanco puesto á dicha distancia. Este efecto no tiene mas causa que la refraccion que ocasiona el agua, y de ningun modo proviene de la refraccion del vidrio. Porque si se repite el experimento con la bola vacía, la luz al dar en el papel despues de pasar por el agugero, formará una imágen tan ancha como el mismo agugero, sea la que fuere la distancia entre la bola y el papel. Si se hiciere este experimento con una bola sólida de vidrio, la distancia de su focus á la parte mas inmediata del globo, será la *quarta parte* de su diámetro.

458 Experimento II. *Para hallar la distancia focal de un vidrio convexô.*

231. Si pegamos al un lado de una lente convexâ un pa-

papel con muchos agugeritos, y se le pone directamente al sol, los rayos que pasaren por los agugeritos, estamparán en un papel blanco puesto muy inmediatamente detras de la lente, otras tantas manchas blancas que se irán juntando unas con otras al paso que se alejare el papel de la lente, hasta que en el focus no formarán mas que una sola mancha. Se podrá, pues, medir la distancia de este focus al vidrio, cuya distancia hemos llamado *distancia focal*, y no se hallará sensiblemente mudada, aunque se vuelva al sol el otro lado del vidrio (420), ni aunque se le incline un poco ácia los rayos incidentes (425); y con tal que esta corta inclinacion se haga sin comunicar algun movimiento al medio del vidrio, el focus ó la mancha estampada en el papel no mudará sensiblemente de lugar. Esto manifiesta que el exe del manojo obliquo prosigue en linea recta del mismo modo que el del manojo directo (416). Si se alejare mas el papel del vidrio, las manchas se separarán unas de otras. Fig.

459. Experimento III. *Para determinar la distancia focal de un vidrio cóncavo.*

Si se cubre del mismo modo una lente cóncava, 232. y se la pone al sol, las manchas de la luz que pasare por los agugeros, y fuere á dar en el papel detras del vidrio, se irán apartando mas y mas unas de otras al paso que el papel se apartare del vidrio. Quando la distancia *ab* de dos manchas qualesquiera es dupla de la distancia *AB* que hay entre los dos agugeros correspondientes del papel por donde pasan; la distancia *Ef* entre el papel y el vidrio es entonces igual á la distancia *EF* de su focus (364 y sig.), y por este medio se puede medir.

De

Fig.

De la diferente refringibilidad de los rayos de luz.

460 Si cada manojo de luz fuera un cuerpo simple y homogeneo, sería de todo punto verdadero quanto dexamos sentado hasta aquí; pero si por el contrario cada espiga de luz es un cuerpo eterogeneo, no pueden menos de padecer sus restricciones algunas de las proposiciones antecedentes. Es, pues, de suma importancia aclarar este punto, para cuya averiguacion lo mas acertado es, en nuestra inteligencia, copiar al pie de la letra algunos experimentos con los quales probó el gran Newton á fines del siglo pasado, que *todo manojo de luz, conforme viene del cuerpo luminoso, se compone de siete rayos, cada uno de un color distinto, propio é invariable.*

461 Hice (dice Newton) en la puertaventana de un quarto muy obscuro un agugero redondo *F*, cuyo diámetro venia á ser de un tercio de pulgada; apliqué á dicho agugero un prisma triangular de vi-
233. drio *ABC* para refringir el manojo de rayos solares *SF* que entraba en el quarto. Al salir del prisma el manojo se apartaba de su primera direccion ácia arriba, é iba á pintar en la pared opuesta del quarto una imágen del sol, ó *espectro* coloreado, esto es, de varios colores, figurado en *PT*. En este experimento el exe del prisma, esto es, la linea que pasando por medio del prisma vá de un extremo á otro paralela al borde del ángulo refringente, era perpendicular al exe del manojo. Volviendo poco á poco el prisma al rededor de su exe, reparé que la imagen coloreada del sol pintada en la pared por la luz refracta, baxaba al principio, y despues subia; y quando entre el subir y baxar me pareció estaciona-

naria ó fixa, paré el prisma y le aseguré en la situacion en que entonces se hallaba. Fig. 233.

En esta situacion del prisma, las refracciones que los rayos padecian en sus lados, eran iguales; por manera que quando queria que las refracciones en ambos lados del prisma fuesen iguales, reparaba el sitio donde la imágen coloreada del sol se paraba entre el subir y el baxar, y quando daba la imágen en dicho sitio aseguraba el prisma.

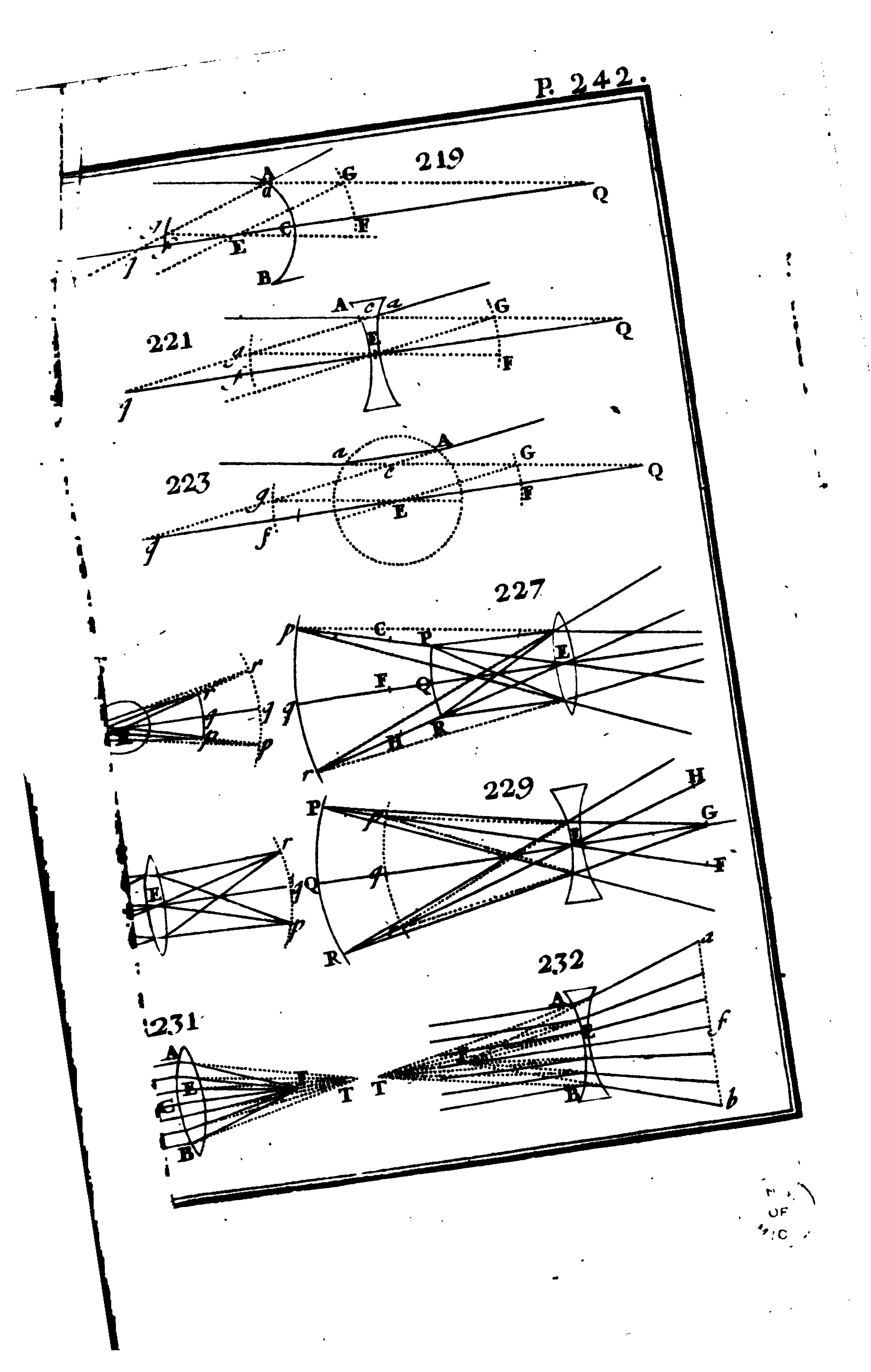
Hecho esto, hice que la luz refracta diese en una hoja de papel blanco *MN* puesta de intento cerca de la pared opuesta del quarto, y observé la figura y las dimensiones de la imágen solar *PT* que la luz estampaba en el papel. Esta imagen era prolongada, tenia los lados rectilineos y paralelos, y sus extremos redondos. Por los lados era terminada con bastante distincion, pero en los extremos era muy confusa, debilitándose allí la luz por grados, antes de desaparecerse del todo. A la distancia de diez y ocho pies y medio del prisma, lo ancho de la imágen cogia como dos pulgadas y un octavo, su longitud como unas $9\frac{3}{4}$ ó 10 pulgadas, y la de sus lados rectilineos como unas 8 pulgadas. El ángulo refringente *ACB* del prisma que dilataba la luz en dicho espacio, era de 64°. Quando este ángulo era menor, la imágen era menos larga, pero cogia de ancho lo mismo que antes. Es tambien de reparar que los rayos de luz iban en linea recta desde el prisma á la imagen, y que por consiguiente tenian unos respecto de otros al salir del prisma la inclinacion de que provenia la longitud de la imagen, cuya inclinacion era de mas de dos grados y medio. La imágen *PT* era coloreada; sus colores los mas vivos, empezando á contarlos desde abaxo eran el *roxo*, *anaranjado*, *amarillo*, *verde*, *azul*, *añil* y *violado*, con una multitud de medias tintas entre ellos.

Fig. 233. 462 De este experimento y otros muchos infirió Newton que la luz del sol se compone de la mezcla de muchas especies de rayos coloreados, quiero decir, que cada uno tiene su color propio, entre los quales hay algunos que, con incidencias iguales, se refringen mas que otros, por cuyo motivo se llaman mas refringibles. El roxo *T*, que está mas próximo á la imágen circular que los rayos directos del sol hubieran pintado en *Y* á no haberlos refringido el prisma, es de los rayos menos refringidos. Los demas colores, como el anaranjado, amarillo, verde, azul, añil y violado, que se apartan mas de la misma imágen *Y* que el roxo, son de los rayos que han padecido mayores refracciones; por manera que los mas refractos han dado los colores que están mas arriba.

463 Por lo mismo que la imágen es cinco veces mas larga que ancha, los rayos no han padecido todos una refraccion igual. Porque vamos á demostrar que si todos los rayos fuesen igualmente refringidos, quando el prisma está en la situacion expresada (461), quiero decir, quando la imágen es estacionaria, y está por consiguiente tan baxa como puede estar, la imágen debería ser redonda como la mancha que está en *Y*.

Sea *EG* la puertaventana; *F*, el agugero que se le ha hecho por donde el manojo de los rayos solares entra en el quarto; *ABC*, el prisma; *XY*, el sol; *MN*, el papel donde se estampa la imágen del sol; y *PT*, la imágen misma cuyos lados son rectilineos y paralelos, y los extremos *P* y *T* redondos. Sean *YKHP*, *XLIT* dos rayos que el primero procedente del limbo ó borde inferior del sol, vá á dar en el extremo superior de la imágen pintada en el papel, despues que ha padecido dos refracciones al atravesar el prisma, la una en *K*, y la otra en *H*; y el se-

gun-


219
A
a
G
Q
F
C
E
B
221
A
c
a
G
Q
E
F
223
a
A
G
c
Q
E
F
f
227
C
P
E
F
Q
R
H
r
229
P
H
G
F
E
Q
R
232
231
A
E
C
B
T
T
f
b

gundo, procedente del borde superior del sol, vá á Fig. dar en el extremo inferior de la imágen, despues de 233. refringirse en *L* é *I*. Ya que se supone que las dos refracciones en los dos lados del prisma son iguales, esto es, que la refraccion en *K* es igual á la que se hace en *I*, y la refraccion en *L* igual á la refraccion en *H*; por manera, que la suma de las refracciones en *K* y *L* de los rayos incidentes es igual á la suma de las refracciones en *I* y *H* de los rayos emergentes, síguese que las refracciones en *K* y *H* componen una suma igual á la de las refracciones en *I* y *L*, y que por lo mismo, una vez que ambos rayos se apartan igualmente de sus direcciones primitivas, están inclinados uno respecto de otro al salir del prisma, del mismo modo que antes de entrar en él, esto es, medio grado que corresponde al diámetro del sol. Luego la longitud *PT* de la imágen subtendería un ángulo de medio grado, igualmente que su ancho; de donde se seguiría que la imágen sería redonda; y lo sería con efecto en el supuesto de ser los dos rayos *XLIT*, *YKHP*, y todos los demas que forman la imágen *PT* igualmente refringibles. Luego ya que manifiesta la experiencia que dicha imágen no es redonda, que antes al contrario es muy prolongada; se infiere que los rayos que por causa de una refraccion mayor van á dar en el extremo superior *P* de la imagen, no pueden menos de ser mas refringibles que los que ván á dar en el extremo inferior *T*, á no ser que la desigualdad de refraccion sea casual.

464 Hemos, pues, de probar de modo que no quede duda alguna, que la desigualdad de las refracciones de los rayos no es casual, ni tampoco proviene de estar cada rayo dilatado, y como hendido y desparramado en muchos rayos divergentes, y que antes al contrario es constante y regular, esto es, que con incidencias iguales hay indispensablemente

Fig. rayos mas quebrantados unos que otros, y que lo son constantemente.

465 Esto se averigua facilísimamente procurando que los rayos padezcan otra refraccion despues de salidos del prisma en el experimento propuesto (461); pero no en la misma direccion, sino de lado, y se executa colocando en situacion perpendicular otro
234. prisma *DH* despues del primero *ABC*, de modo que la luz refracta le haya de atravesar.

Porque si los rayos no fuesen mas que dilatados y desparramados por las refracciones que padecen al atravesar el prisma, de manera que de esto proviniera el ser prolongada la imágen del sol, el segundo prisma habria de dilatar y desparramar de lado cada uno de los rayos que saliesen del prisma *ABC*, cabalmente del mismo modo que este ha dilatado de arriba abaxo los rayos que recibió inmediatamente del sol, y causar por consiguiente en latitud lo que el otro ha causado en altura, de lo qual debería resultar indispensablemente una imágen quadrada *pp'tt'* del sol, compuesta de bandas coloreadas de igual longitud que la primer imágen *PT*, las quales no serian mas que las porciones coloreadas de dicha imágen *PT* estendidas y dilatadas por la dispersion de los rayos que la tiñen, ocasionada por el segundo prisma.

466 Pero nada de esto sucede. La latitud de la imágen *PT* se mantiene la misma y no crece. La única alteracion que padece la imágen es que en vez de ser vertical, está inclinada conforme se vé en *pt*; lo que es una conseqüencia natural de las refracciones cruzadas de los dos prismas. Su extremo inferior *T* es el que menos se ha movido, y esto prueba que los rayos que teñian el extremo *P* de la imágen, como los azules y violados, padecen mayores refracciones al pasar por el segundo prisma, que no los rayos roxos y amarillos que formaban el extremo *T*; y que por consi-

siguiente son todavía los mas refringìbles despues que Fig.
han atravesado el primer prisma. 234.

467 Cada rayo homogeneo considerado separadamente, sigue en su refraccion una sola y misma ley, por manera que su seno de incidencia tiene con su seno de refraccion una razon invariable; quiero decir, que hay respecto de cada rayo coloreado una razon de refraccion que discrepa de la de los otros, y le es peculiar. Antes que manifestemos como Newton averiguó con experimentos los números que expresan esta razon, daremos el método por el qual determinó la razon de refringibilidad de los rayos de una refringibilidad media, esto es, de los rayos que dán en medio de la imagen. Hemos prevenido (461) que quando el exe del prisma es perpendicular al manojo de los rayos solares, y la refaccion los lleva arriba, volviendo poco á poco el prisma al rededor de su exe, la imágen coloreada del sol estampada en la pared ó en un papel, baxa primero, y despues sube; y que si se asegura el prisma en la posicion donde se halla quando la imágen es estacionaria, esto es, quando se pára entre la baxada y la subida, los rayos padecen al salir del prisma refracciones iguales á las que padecen al introducirse en él.

Porque quando la imágen baxa es evidente que la suma de estas dos refracciones mengua continuamente, y despues crece quando sube; hay, pues, dos situaciones del prisma, la una antes que la imagen sea estacionaria, la otra despues, en las quales la suma de las refracciones en sus lados es la misma, con lo qual la imágen dá en el mismo sitio de la pared. El rayo *DE* en la primera de estas dos posiciones, y 235.
el rayo *de* en la segunda, que atraviesan en lado re- 236.
fringente del prisma, están igualmente inclinados á sus lados *AB*, *BC*, bien que ácia direcciones encontradas; quiero decir, que los triángulos *BDE*, *Bed*

Fig. son semejantes. Porque suponiendo que esto sea así
235. y que los rayos vayan ácia uno y otro lado, por las
236. rectas *DE*, *de*, las refracciones que padecen al salir en *D* y *e*, son iguales, del mismo modo que las que padecen al salir en *E* y *d*, y por consiguiente la suma de las refracciones desiguales en *D* y *E* es igual á la de las refracciones que se hacen en *d* y *e*; y por esta razon la imágen queda estampada en el mismo sitio de la pared en ambas expresadas posiciones del prisma. Pero la experiencia enseña que á medida que dicho sitio se acerca mas á aquel donde la imágen es estacionaria, dichas dos posiciones del prisma se arriman mas á aquella donde está quando la imagen está entre el subir y el baxar. Así, los ángulos de los lados
237. *DE*, *de* de los triángulos semejantes *BDE*, *Bed* se arriman al mismo tiempo por grados á la igualdad, y son por último iguales quando la imágen es estacionaria; y por consiguiente las refracciones en *D* y *E* son entonces iguales; de modo que, suponiendo el prisma isósceles, el rayo refracto *DE* es paralelo á su base *AC*.

468 En esta situacion del prisma que dá la imagen estacionaria, el ángulo de refraccion de un rayo, al entrar en el prisma, es igual á la mitad del ángulo refringente *ABC*.

238. Porque si tiramos *LDK* perpendicular á *AB*, y *BQ* perpendicular á la base *DE* del triángulo isósceles *DBE*, la qual por lo mismo dividirá en dos partes iguales (I. 494) el ángulo vertical *B* de dicho triángulo; es patente que el ángulo de refraccion *QDK* será igual á la mitad *QBD* del ángulo refringente del prisma.

469 Pero este ángulo refringente se puede medir por medio de dos reglas (haciendo que formen un ángulo) puestas encima de una mesa muy lisa, de modo que no descanse sino parte de ellas sobre la me-

mesa, y mudando el ángulo que forman las dos reglas, hasta que coincidan con los lados del ángulo refringente del prisma puesto entre ellas. Porque trazando entonces sobre la mesa el ángulo que forman, se sabrá el valor del ángulo refringente, conforme lo dá á entender la figura donde *ab* y *cd* son las reglas, y *e* es el prisma. Fig. 239.

470. Estando dispuesto el prisma como antes, para averiguar el ángulo de incidencia *SDL*, se medirán con un quadrante de círculo los ángulos que forman el rayo incidente *SD*, y el rayo emergente *EP* con el orizonte; la mitad de su suma añadida al ángulo de refraccion *EDK* hallado ya, dará el ángulo de incidencia *SDL*. 238.

Porque prolongando dichos rayos hasta que encuentren en *M* y *N* una orizontal qualquiera *MN*, despues de cruzarse en *I*; los ángulos en *M* y *N* serán los que dichos rayos formarán con el orizonte. Y como estos dos ángulos juntos son iguales al ángulo exterior *MIE*, igual á los dos ángulos interiores juntos del triángulo *IDE*; la mitad de la suma de los ángulos que los dos rayos forman con el orizonte, es igual al uno de dichos álgunos iguales *IED*, *IDE*; pero el ángulo *IDE* añadido al ángulo de refraccion *EDK*, dá el ángulo de incidencia *IDK* ó *SDL*; luego &c.

471 Si el sol estuviere tan alto que el rayo emergente *EP* llegue á ser paralelo al orizonte, entonces el ángulo en *N* se desaparecerá; y si el sol subiere mas arriba todavía, el rayo emergente se inclinará ácia abaxo, y el ángulo en *N* será entonces negativo; por lo qual, para averiguar en este último caso el ángulo de incidencia, se le deberá añadir á la mitad del ángulo refringente del prisma, la mitad de la diferencia de los ángulos que formaren los dos rayos con el orizonte.

 Pon-

Fig. 238. 472 Pondremos aquí una aplicacion que Newton trae de este método. Tratábase de determinar la refraccion media al paso de los rayos del ayre al vidrio. El ángulo refringente del prisma de que se servia era de 62° 30′; la mitad de este ángulo, que es 31° 15′ es el ángulo de refraccion en el prisma, cuyo seno es 5188, siendo el radio 10000. Estando el exe del prisma paralelo al orizonte, y estacionaria la imágen del sol en la pared, observó con un quadrante de círculo el ángulo que los rayos de una refringibilidad media, esto es, los que daban en medio de la imágen coloreada, formaban con el orizonte; añadiendo despues este ángulo á la altura del sol observada al mismo tiempo, halló que el ángulo *PIM* que formaban los rayos incidentes y emergentes, era de 44° 40′, cuya mitad 22° 20′ añadida al ángulo de refraccion 31° 15′ dá 53° 35′ para el ángulo de incidencia, cuyo seno es 8047; y la razon entre estos dos senos en números redondos es de 20 á 31. Es evidente que al pasar los rayos del vidrio al ayre, la razon de 31 á 20 dá (404) la del seno de incidencia al de refraccion respecto de los mismos rayos de refringibilidad media.

473 La excelencia de este método es muy patente. No pide su práctica mas instrumento que un quadrante de círculo y un prisma. Siendo doble la refraccion del rayo, el error que se puede cometer en la práctica, no puede pasar de la mitad de lo que sería si fuese simple la refraccion. A mas de esto, es muy facil colocar el prisma en la situacion necesaria; y aun quando no se consiguiera plenamente, con tal que faltase poco, el lugar de la imágen, ó la suma de las dos refracciones, no por eso dexaría de ser la misma (413); como se puede verificar haciendo la prueba, y es evidente por otra parte, pues la suma de las refracciones es entonces la me-

nor

nor de todas. Porque se sabe, y se puede inferir de Fig. lo dicho (II. 572) que las variaciones de las cantidades variables son generalmente insensibles quando dichas cantidades llegan á ser las máximas ó las mínimas de su especie.

474 Veamos ahora como Newton halló la razon de refraccion de los rayos mas y menos refringibles al pasar del vidrio al ayre. De la longitud $9\frac{3}{4}$ ó 10 pulgadas de la imágen del sol, que el prisma le habia dado á la distancia de unos 18 pies y medio (461), restó la latitud de dicha imágen que cogía $2\frac{1}{8}$ pulgadas, á fin de sacar la longitud que la imágen tendria si el sol no fuese mas que un punto, cuya longitud se quedó por consiguiente en $7\frac{3}{4}$ pulgadas, al poco mas ó menos; claro está que esta longitud es la subtensa del ángulo que los rayos mas refringibles, y los que lo son menos, forman al salir del prisma, despues de introducidos en él, siguiendo las mismas líneas. Es, pues, este ángulo de 2° 0′ 7″ siendo de $18\frac{1}{2}$ pies la distancia desde la imágen al sitio del prisma donde se forma este ángulo. Pero la mitad de este ángulo es el que dichos rayos forman con los rayos de una refringibilidad media al salir del prisma; y la quarta parte de este ángulo, esto es, 30′ 2″ dá el ángulo que formarian los rayos emergentes de mayor ó menor refringibilidad, con los mismos rayos emergentes de refringibilidad media, si coincidieran con ellos en el prisma, y si no padeciesen mas refraccion que al salir del prisma. Porque si en virtud de las dos refracciones iguales que padecen los rayos, la una al entrar y la otra al salir del prisma, el rayo mas refringible y el menos refringible forman con el rayo de refringibilidad media, á su salida, un ángulo que sea la mitad de 2° 0′ 7″, síguese que en virtud de una sola refraccion, el rayo mas refringible y el que lo es menos, formarán á su emergencia, con el rayo de refrin-

Fig. fringibilidad media, un ángulo que será con corta diferencia la quarta parte de 2° 0′ 7″, y esta quarta parte añadida al ángulo de refraccion de los ángulos de refringibilidad media, que hemos hallado de 53° 35′, y restado despues del mismo ángulo, dá para el ángulo de refraccion de los rayos mas refringibles 54° 5′ 2″, y para el de los menos refringibles 53° 4′ 58″, cuyos senos son 8099 y 7995, siendo el ángulo comun de incidencia de 31° 15′, cuyo seno es 5188. Estos son en números redondos los mas chicos, como 78, 77 y 50.

475 Newton buscó despues la razon de refraccion de los demas rayos, y la sacó de una propiedad muy extraña de la imagen. Por medio de medidas puntuales y repetidas averiguó que los espacios coloreados de la imágen eran de una extension igual y proporcional á las diferencias que hay entre las divisiones de un monocordio que dá las notas de la octava (*) *re*, *mi*, *fa*, *sol*, *la*, *si*, *ut*, *re*; quiero decir, que si por los límites de los colores de la imágen se tiran lineas transversales y perpendiculares á los
240. lados rectilineos *MG*, *FA*, los dividirán del mismo modo que está dividida una cuerda sonora que diere á mas del son principal el tono inmediatamente mas alto, la tercera menor, la quarta, la quinta, la sexta mayor, la séptima menor y la octava; por manera que prolongando *MG* hasta *X*, y haciendo *MX* = *MG*, si se toman *GX*, *nX*, *kX*, *fX*, *eX*, *cX*, *aX*, *MX* en la razon de los números 1, $\frac{8}{9}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{1}{2}$; ó si se quiere, suponiendo *GX* de 720 partes, en la razon de estos 720, 640, 600, 540, 480, 432, 405, 360, los intervalos *Ma*, *ac*, *ce*, *ef*, *fk*, *kn*, *nG* se-

(*) El que quisiere saber que cosa es la octava y todos los intervalos en que se suele dividir, acuda á mi Obra intitulada: *Lecciones de Clave, y Principios de armonía.*

serán los espacios que ocupan los colores de la imágen, el roxo, anaranjado, amarillo, verde, azul, añil y violado. Fig.

Pero como estos espacios ó intervalos subtenden, dice Newton, las diferencias de las refracciones de los rayos que ván hasta los límites de dichos colores, se pueden considerar sin recelo de error substancial, como proporcionales a las diferencias de los senos de refraccion de dichos rayos, que tienen un seno de incidencia comun; y pues el seno comun de incidencia de los rayos de mayor y menor refringibilidad, al pasar del vidrio al ayre, es al seno de refraccion de dichos rayos como 50 á 78 y 77 (474); para hallar los senos de refraccion de las demas especies, todo se reducirá á dividir la diferencia de los senos de refraccion 77 y 78 en la misma razon que *GM*, y tendremos $77, 77\frac{1}{8}, 77\frac{1}{5}, 77\frac{1}{3}, 77\frac{1}{2}, 77\frac{2}{3}, 77\frac{7}{9}, 78$ para los senos de refraccion de los demas rayos de diferentes refringibilidades, que pasan del vidrio al ayre, siendo 50 su seno comun de incidencia.

DE LA VISION Y DESCRIPCION DEL OJO.

476 Representa la figura un ojo humano cortado 241. casi orizontalmente. La cavidad donde mora este órgano pertenece al craneo, y se llama *órbita*. Un nervio *YVT*, llamado *nervio óptico*, se introduce en esta cavidad, se desparrama y forma, despues de desparramado, el globo del ojo, el qual por lo mismo se compone exteriormente de las partes que texen los nervios. La dura madre, primera túnica del nervio óptico, y demas nervios, es tambien la primera que abriéndose forma el globo que estamos describiendo. Entonces se llama *esclerótica*, y guarda el mismo nombre mientras es opaca. Esta es la túnica mas fuerte y gruesa del globo del ojo. Su parte anterior *ABC*, don-

Fig. 241. donde es mas delgada y flexible, es transparente, y es parte de una esfera menor que la del ojo, por lo qual es mas saliente, y hace que el ojo pueda recibir mejor rayos procedentes de las partes laterales de los objetos. Esta porcion se llama *cornea transparente*, para distinguirla de la esclerótica *ATYC* que se llama *cornea opaca*.

477 La pia madre, segunda túnica del nervio óptico y de los demas nervios, que está inmediatamente debaxo de la dura madre, se dilata y abre como ella, y aforra interiormente toda la cornea opaca. Compónese de dos hojas; la una, verdaderamente membranosa, se pega enteramente á la cornea opaca, y se confunde por último con ella, cerca de la cornea transparente; la otra que se llama *choroide*, no es mas que un compuesto de nervios y vasos que salen de la superficie interna de la primera. Contienen estos vasos una especie de tinta que dá un color negruzco á dicha última hoja.

En el parage donde la cornea se junta con la esclerótica, la choroide se separa del globo, y forma aquella separacion donde está el agugero de la pupila, que divide el segmento pequeño del ojo del segmento grande; cuya separacion se llama la *uvea*.

478 Acia la parte anterior del ojo la choroide se desdobla. Su parte anterior forma aquella corona coloreada llamada el *iris*, en medio de la qual hay un agugero redondo llamado la *niña* ó *pupila*. Esta corona se compone de fibras musculares, que las unas son rectas y las otras circulares. Las primeras se dirigen al centro de la niña como otros tantos radios; sirven para abrir y dilatar la niña, quando el ojo necesita mas luz. Las otras son todas concéntricas con el agugero de la niña, sirven para angostarla siempre que una luz muy viva hiere con sobrada fuerza el órgano de la vista.

La

479 La parte posterior de la choroide forma la *corona ciliar DE*. Tiene engastado directamente enfrente del agugero de la niña un cuerpo transparente *FG* bastante sólido, de forma lenticular, mas convexô ácia la parte posterior del ojo que ácia la parte anterior, al qual llaman el *cristalino*. Está el cristalino mas cerca de la cornea que del fondo del ojo; y con el discurso del tiempo suele menguar su convexidad. Fig. 241.

480 La parte medular del nervio óptico, cuyo centro ocupa, como el de todos los nervios, se dilata del mismo modo que sus membranas, y forma una tela blanca, babosa y muy sutil pegada á la choroide, cuya tela se llama la *retina*.

481 El espacio de entre la cornea transparente, el cristalino y la corona ciliar, está lleno de una agua clara y cristalina que se llama el *humor aqueo*, en esta nada el *iris*. Entre el fondo del ojo y el cristalino hay otro espacio mucho mayor, lleno de una gelatina transparente, llamada el *humor vitreo*, en cuya superficie anterior está puesto el cristalino como un diamante en su engaste. La potencia refringente de estos humores es menor que la del cristalino.

482 Es sumamente facil de concebir en virtud de esta descripcion del ojo, como las diferentes substancias que hay en la cavidad del ojo contribuyen para formar una imágen distinta *pqr* de un objeto *PQR* en el fondo del órgano donde se ha de estampar. Desde luego es cierto que los rayos de que se componen los manojos que despiden los diferentes puntos *P*, *Q*, *R* del objeto *PQR* se rompen acercándose al cateto de incidencia, al atravesar la cornea *ABC* (403), pues entran en un medio mas denso que el ayre; y como este medio es terminado por una superficie convexâ, los rayos que divergian, y aun eran paralelos, se hacen convergentes (419). Pero co-

Fig. como esta convergencia no bastaba para que los pun-
241. tos de los manojos cayesen en el fondo del ojo, era preciso hubiese otro medio, cuya figura y virtud refringente la aumentase quanto era necesario. El cristalino *FG* de figura lenticular, y cuya virtud refringente es mayor que la de los humores entre los quales está, tiene quanto es menester para darles á los rayos los grados de refringencia que les faltan. Porque al dar en su superficie anterior, la refraccion los arrima al exe de cada uno de los manojos que componen, por la misma razon que sucede lo propio quando atraviesan la cornea *ABC*. Por consiguiente es entonces mayor su convergencia, y es patente que crece todavía mas al atravesar la superficie posterior. Como estos rayos pasan despues á un medio menos denso, que el cristalino, se refringen apartándose del cateto de incidencia (403), y por ser cóncava la superficie del último medio, prosiguen arrimándose al exe de los manojos cuyos son. Se hacen, pues, mas convergentes, y el nuevo grado de convergencia que adquieren, es cabalmente el que se necesita, quando los objetos están en la esfera ó alcance de la vista; para hacer que los vértices *p*, *q*, *r* de sus manojos caigan puntualmente en el fondo del ojo, y formen allí por consiguiente una imágen *pqr* del objeto *PQR*. Esta imágen está trastornada, porque los exes de los manojos se cruzan al atravesar el cristalino, del mismo modo que si atravesaran un vidrio lenticular.

El rayo *QOq* que atraviesa el ojo sin refringirse, y pasa por lo mismo por el centro de la cornea, y de todos los humores, se llama *el exe óptico*.

483 Como el punto del fondo del ojo donde dá el exe óptico, corresponde directamente al agugero de la pupila, no es el mismo donde el nervio óptico se abre para formar el globo. Está un poco mas abaxo y de lado ácia las sienes.

Las

484 Las imágenes no se pintan con igual distincion en todas las partes del fondo del ojo. No son perfectamente distintas sino en una porcion muy pequeña, y es aquella cuyo centro es el punto donde el exe óptico encuentra el fondo del órgano. Esta es la razon por que no vemos distintamente en una mirada mas que una corta parte del objeto, todo lo demas se vé confusamente. Fig. 241.

485 La imágen de un objeto se forma, pues, de tantos puntos distintos, quantos hay en el objeto que representa; y esta imágen no es del todo perfecta, sino en quanto dichos puntos no se confunden, están muy distintos, y guardan la misma colocacion respectiva que los puntos correspondientes del objeto. Luego quando los vértices de los manojos no dán puntualmente en el fondo del ojo, y quando los rayos detenidos antes ó despues de su reunion, están esparcidos en espacios circulares mayores ó menores, la imágen queda confusa, y por consiguiente es tambien confusa la vision. Esto sucederia indefectiblemente, si el ojo no padeciese mudanzas respectivas á las diferentes distancias de los objetos. Porque si se mantuviera siempre en el mismo estado, solo se juntarían muy puntualmente en el fondo del ojo los rayos de los objetos que estuviesen á cierta distancia. Los rayos de los objetos que estuviesen á una distancia menor, tendrian su punto de concurso mas allá de dicho fondo, y los de los objetos mas distantes le tendrian mas acá.

Quando los objetos están cerca, es preciso que los humores del ojo se pongan mas convexôs á fin de romper mas los rayos, y acelerar su reunion; y quando los objetos están lexos, es necesario que se aplanen, á fin de quebrantar menos los rayos, y estorvar que se junten demasiado pronto. Quizá en el primer caso se prolonga, y en el segundo se acorta el globo

Fig. bo del ojo por la accion de los músculos.

486 La descripcion que hemos dado del ojo, y la explicacion que dexamos propuesta de la vision se hallan confirmadas por la experiencia. Porque si se le quita al fondo del ojo la esclerótica, se vén al través de las demas membranas mas delgadas, las imágenes de los objetos estampadas muy distintamente. Y como estas imágenes hacen una impresion sensible, que el movimiento á lo largo de las fibras de los nervios ópticos comunica al instante al cerebro, son la causa ocasional de la vision.

487 Hemos insinuado (485) que una de las condiciones necesarias para que sea perfecta la vision, es que los objetos se pinten distintamente en el fondo del ojo, y por consiguiente que los rayos despedidos de sus diferentes partes, se junten en otros tantos puntos distintos de dicho fondo, quantos son los puntos del objeto que los despide. Pero hay otra condicion mas, y estriba en que los rayos que ván á concurrir en cada uno de dichos puntos, sean bastantes en número para hacer allí una impresion sensible; y que ademas de ver distintamente, veamos tambien claramente.

488 Pende, pues, la claridad de la vision de la cantidad de luz introducida en el ojo. Pero esta cantidad de luz pende de dos cosas; el objeto ha de ser bastante luminoso ó alumbrado, y despedir por consiguiente un número suficiente de rayos; y es preciso que la pupila pueda ensancharse lo bastante. Es excusado prevenir que la luz no ha de ser mucha; nadie ignora que entonces haría una impresion sobrado viva, y podría lisiar el órgano.

489 Quando se quiere determinar la magnitud de las imágenes en el fondo del ojo, basta considerar un rayo solo en cada manojo. Porque quando la imágen es distinta, todos los rayos de un mismo mano-

nojo concurren en un punto único en el fondo del Fig.
ojo (484); ó, lo que viene á ser lo mismo, podemos considerar la niña como angostada y reducida á un punto. Para excusar complicaciones y ayudar á la fantasía, podemos suponer que el punto *O* es un aguge- 242.
ro hecho en el centro de un emisferio hueco y obscuro *DqE*, el qual solo admite los rayos que le atraviesan sin quebrantarse. Porque entonces los diámetros ó longitudes de las imágenes *pqr* crecerán ó menguarán como el ángulo *pOr*, ó como el ángulo *POR*.

490 *Los ángulos que forman en el ojo los rayos que despiden las partes iguales de un objeto chico, son iguales.*

Divídase la subtensa *BC* de un ángulo pequeño 243.
BAC, ó lo que es lo propio, la cuerda del arco que le mide, en un número el que se quiera de partes iguales *BH*, *HI*, *IC*; y por los puntos de division tírense al vértice del ángulo las rectas *HA*, *IA* que dividirán el mismo ángulo en el mismo número de partes iguales unas con otras, con cortísima diferencia. Estos ángulos parciales serán iguales, si se pudiere tomar la recta *BC* por el arco *BC*, que mide el ángulo *A*, y se arrimarán tanto mas á la perfecta igualdad, quanto menor fuere el ángulo. Por esta razon la proposicion solo es de todo punto verdadera respecto de ángulos muy chicos.

491 *Ángulos chicos subtensos por una misma perpendicular, son recíprocamente como las distancias á que están del vértice.*

Si la distancia *AB* es dupla ó tripla de *Ab*, la subtensa *BC* será dupla ó tripla de la subtensa *bc* del mismo ángulo *A*. Divídase *BC* en partes *BH*, *HI*, *IC*, cada una igual á *bc*, y tírense los radios *HA*, *IA*, estos dividirán el ángulo *BAC* en otras tantas partes iguales. Luego si dos ángulos *bAc*, *BAH* tienen una misma subtensa ó subtensas iguales *bc*, *BH*, la can-

Fig. 243. tidad del primero bAc será á la del segundo BAH, como la segunda distancia BA es á la primera bA.

492 *Los diámetros ó tamaños de las imágenes de los objetos estampadas en el fondo del ojo, siempre son proporcionales á los ángulos que los rayos procedentes de los extremos del objeto, forman al cruzarse en el centro de la niña, con tal que estos ángulos sean pequeños.*

244. Porque sean dos ó tantos objetos como se quisieren PQ, $p'q'$ paralelos ó inclinados uno respecto de otro, que subtenden el mismo ángulo POQ ó $p'Oq'$ formado en el ojo por los rayos procedentes de sus extremos. Como los rayos de luz procedentes de P y p', y que siguen un mismo rumbo $Pp'O$ padecen las mismas refracciones, y encuentran por consiguiente el fondo del ojo en el mismo punto p; por la misma razon, los que vienen de Q y q', irán tambien á encontrarle en el mismo punto q. Luego las imágenes pq de los objetos PQ y $p'q'$ que subtenden el mismo ángulo formado en el ojo por los rayos procedentes de sus extremos, serán del mismo tamaño.

Ahora bien; consta por experiencia que las imágenes de los objetos formadas en el fondo del ojo, son de todo punto semejantes á los objetos que representan; quiero decir, que las proporciones de las partes pq, qr de la imágen pqr son las mismas que las de las partes PQ, QR del objeto PQR. Pero la razon de estas partes PQ, QR es con corta diferencia la misma que la de los ángulos POQ, QOR que subtenden; luego es verdadera la proposicion por lo tocante á los objetos PQ, QR puestos á una misma distancia del ojo. Y como acabamos de probar que los objetos PQ y $p'q'$ tienen la misma imágen pq, síguese que las imágenes de los objetos $p'q'$ y QR siguen la razon de los ángulos $p'Oq'$, QOR que los rayos procedentes de los extremos forman al tiempo de cruzarse en el

cen-

centro de la niña. Estos ángulos se llaman *ángulos ópticos ó visuales.* Fig. 244.

493 *Quando un objeto se acerca ó aparta del ojo, el diámetro de su imágen en el fondo del ojo crece ó mengua en razon inversa de la distancia que hay entre el objeto y el ojo, con tal que el ángulo visual sea bastante pequeño.*

Porque, el diámetro de la imágen crece ó mengua como el ángulo visual (492); y este ángulo, quando es bastante pequeño, crece ó mengua en razon inversa de la distancia del objeto al ojo (491).

494 *El grado de claridad de la imágen de un objeto estampada en el fondo del ojo, siempre es el mismo, esté èl objeto á la distancia que estuviere del ojo, con tal que ninguno de los rayos sea interceptado en el camino, y que la abertura de la pupila se mantenga la misma.*

Supongamos v. gr. que el ojo esté dos veces mas cerca del objeto; las dimensiones de la imágen llegarán á ser duplas (493), y por consiguiente la imagen será quádrupla (I.580). Pero la cantidad de rayos recibidos con una misma abertura de niña á una distancia la mitad menor, es tambien quádrupla (364); luego la luz es de igual intensidad que quando el objeto estaba á una distancia dupla de esta.

495 Síguese de aquí que la falta de claridad de los objetos remotos proviene de la opacidad de la atmósfera que sorbe y desparrama parte de la luz que debería llegar al ojo. Esta es la razon por que el sol, la luna y las estrellas tienen poco resplandor en el orizonte, y llegan á ser mas luminosos al paso que van subiendo; porque se pierde tanta mas luz, quanto mayor y mas denso es el espacio que los rayos han de atravesar.

496 *La magnitud aparente de un objeto es una cantidad de extension visible, proporcional al ángulo*

Fig. *que dos rayos procedentes de los extremos del objeto, forman al cruzarse en el ojo, esto es, al ángulo visual.*

Porque los extremos del objeto se vén en la direccion de dichos rayos; y conforme forman un ángulo mayor ó menor, al entrar en el ojo, la imágen coge en el fondo del ojo un espacio mayor ó menor, y causa por lo mismo la sensacion de una extension visible mayor ó menor.

497 *La magnitud aparente de un objeto, quando el ángulo visual es pequeño, es recíprocamente como su distancia al ojo; quiero decir, que si el objeto se arrima al ojo, su magnitud aparente crece á medida que su distancia real mengua.*

Porque la magnitud aparente de un objeto es (496) una cantidad de extension visible proporcional al ángulo que el objeto subtende en el ojo; cuyo ángulo crece, quando es pequeño, con corta diferencia, del mismo modo que la distancia real entre el ojo y el objeto mengua (491).

De las ideas que se adquieren con la vista.

498 La idea que nos formamos de la distancia á la qual nos parece que está un objeto, cuya distancia se llama su *distancia aparente*, es la de una distancia real medida, ya con la mano, ya con el cuerpo caminando, ó de otro modo. Nos la sugiere la magnitud aparente del objeto quando es solo. Pero si vemos el objeto rodeado de otros objetos, y esto es lo mas comun, formamos juicio de su distancia, así por medio de su magnitud aparente, como por la de los objetos que hay entre él y el ojo. Si entre él y nosotros v. gr. hay campos, montes, rios, &c. la extension de estos diferentes objetos influye mucho en el juicio que formamos de la distancia del objeto que miramos. Porque la magnitud ó extension de un objeto no es

mas

mas que la distancia aparente entre dos de sus extremos; y la que reparamos entre un objeto qualquiera y nosotros, no es mas que la extension ó magnitud aparente de los objetos intermedios. Algunas veces creemos que un cuerpo se nos acerca, solo porque crece su magnitud aparente; y recíprocamente se ha averiguado por medio de muchos experimentos hechos con toda especie de vidrios, que quando se aumenta la magnitud aparente de un objeto, comunicándole algun movimiento al vidrio, al ojo ú al objeto, siempre parece que se acerca; y al contrario, parece que se aparta quando su magnitud aparente mengua. Fig.

De aquí se puede inferir que *la idea de la magnitud del objeto es lo que nos dá la idea de su distancia.*

499 Dos lineas paralelas *ABC*, *DEF* miradas oblicuamente convergen al parecer, y se arriman tanto mas, quanto mas se apartan del ojo. Porque las magnitudes aparentes de sus intervalos perpendiculares *AD*, *BE*, *CF*, &c. ván siendo siempre menores. Y por lo mismo parece que las paralelas convergen ácia una linea imaginaria *OG* que se concibe que pasa por el ojo y es paralela con ellas. 245.

Esta es la razon por que las partes distantes de un paseo parece que se ván arrimando, ó las del piso de una galería larga parece que se ván siempre levantando, y las del cielo raso de la misma galería parece que baxan y se ván acercando á la orizontal *OG*.

500 *La magnitud aparente de una linea* AB *mirada muy oblicuamente á una distancia dada* OA, *crece y mengua en la misma proporcion que la distancia perpendicular* OP *del ojo á la linea* AB *prolongada, con tal que la distancia* OA *sea muy grande respecto de* AB. 246.

Porque, sea el radio *BO* que corte en *C* una recta *AC* perpendicular á *AB*; suponiendo que el ojo su-

Fig. suba ó baxe por la perpendicular *OP*, la linea *AC* crecerá y menguará en la misma razon que *OP*, y por consiguiente el ángulo *AOC* que *AC* subtende, crecerá y menguará tambien en la misma razon (490). Pero este ángulo mide la magnitud aparente de *AB* (496). Luego &c.

DE LOS INSTRUMENTOS ÓPTICOS.

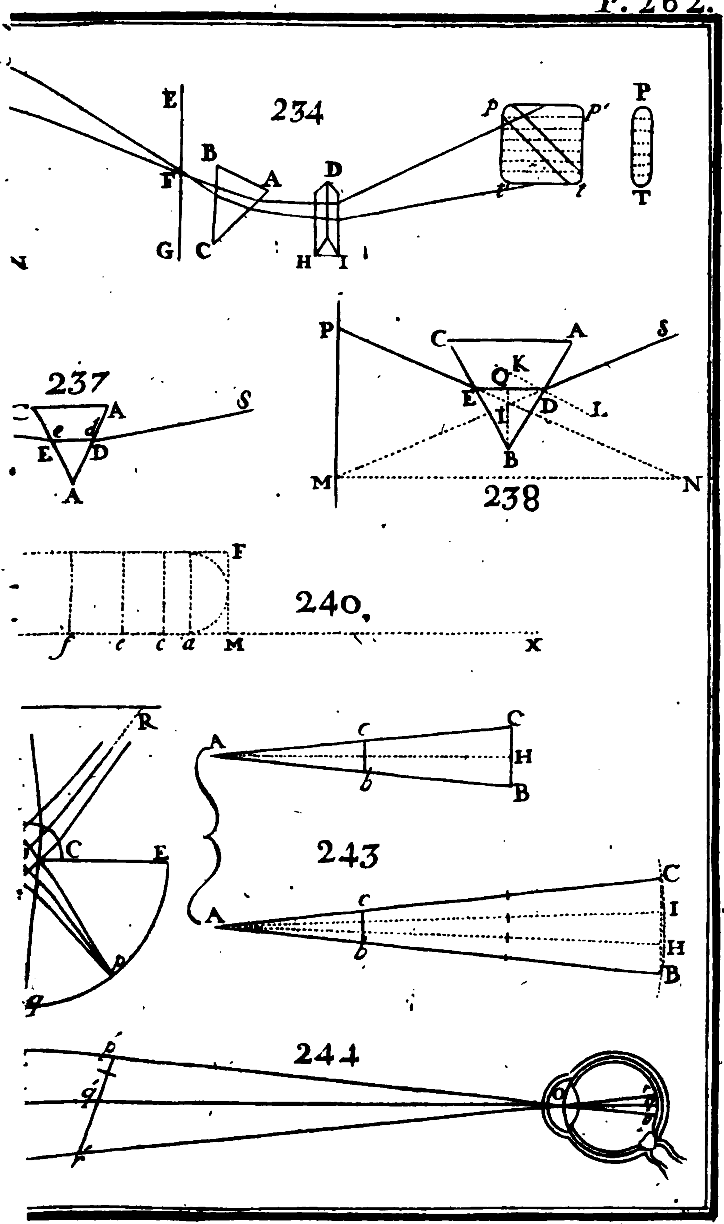
Aunque son muchos estos instrumentos, darémos á conocer los principales no mas.

De la Cámara obscura.

501 La construccion y los usos de este instrumento, cuyo destino es facilitar el dibuxo de qualesquiera objetos, se fundan en el experimento siguiente.

247. Si los rayos del sol ó de la luna ó de una vela apartada, que se han hecho convergir ácia un focus *q* por medio de una lente convexa *E*, son interceptados por un espejo *AB*, los reflectirá de modo que se harán convergentes ácia un focus *Q* tan apartado del espejo ácia adelante, quanto lo está *q* ácia atrás, como se puede hacer la prueba con poner un pedazo de papel blanco en *Q*, para que le hieran los rayos reflexos. Por consiguiente, si suponemos que los rayos reflexos vuelven directamente del punto *Q* ácia el espejo *AB*, los reflectirá de modo que se harán convergentes ácia *q*. Si plantamos una lente convexa en el agugero de una ventana, y ponemos obscura la pieza, las imágenes de los objetos exte-

248. riores, como *PQR* que se vian trastornadas en el papel vertical, como *pqr*, pueden parecer derechas por la reflexion que se hace abaxo en un papel orizontal *p'q'r'*, quando el expectador vuelve las espaldas á la lente. Para dirigir como se quiera el exe de la


234
E
F
G
B
A
C
D
H
I
p
p'
t'
t
P
T
237
A
S
e
d
E
D
A
238
P
C
A
S
K
O
E
I
D
L
B
M
N
240.
F
f
e
c
a
M
X
R
C
E
p
q
A
c
C
H
b
B
243
A
c
C
I
H
b
B
244
p
q
r
o

la lente ácia un objeto, se la coloca en un agugero Fig.
grande cilíndrico hecho en medio de una bola de madera, la qual se mueve al rededor de su centro en una faja ó zona de palo asegurada en una puertaventana. Compónese esta faja de otras dos unidas una con otra por medio de un tornillo despues de colocada la bola, y por ser cóncava la zona, no puede pasar la luz por entre ella y la bola. Las imágenes de los objetos son tanto mayores quanto mayor es la distancia del focus de la lente, y tanto mas vivas quanto mayor es su abertura. Si la distancia del focus de la lente fuere de 8 ó 10 pies, será del caso vayan á estamparse las imágenes en una mampara grande cubierta con un lienzo ó papel blanco, que tenga dos ruedas para poderla arrimar ó apartar segun convenga.

502 Para sacar copias de las imágenes pintadas, ó la perspectiva de los sólidos, trazando las lineas exteriores ó los contornos de sus imágenes formadas por la lente; se debe colocar el original fuera del quarto á la distancia conveniente, procurando vaya á parar la imágen á una hoja de papel, ó á un gran vidrio plano que esté sin pulir por un lado. Despues de asegurado verticalmente este vidrio, vuelta su cara sin pulimento ácia el expectador, se podrán trazar con un lapiz en este vidrio los principales lineamentos de la imágen. Despues se extenderá una hoja de papel fino sobre el vidrio, colocándole de modo que se perciban al través las lineas trazadas con el lapiz, y se dibuxará facilmente la imágen en el papel. Para que salga distinta la imágen que se estampa en el vidrio, despues de asegurado, se ha de colocar la lente en un tubo que corra por dentro de otro afianzado en la puertaventana.

503 Pero se podrá excusar trazar dos veces la 249.
figura, practicando lo siguiente. Despues de tendido

Fig. sobre una tabla muy lisa el papel donde se han de dibuxar los objetos, se colocará esta tabla encima de una mesa muy firme debaxo de la lente puesta en la puertaventana; por medio de un espejo inclinado se reflectirá la imágen al papel, y se le afianzará sobre la tabla, conforme voy á declarar. Son *ab* y *cd* dos tablas aseguradas verticalmente en la mesa de cada lado del papel; *ef* es otra tabla que coge de largo tanto como la distancia que hay entre las dos tablas verticales, y lleva en cada extremo una clavija redonda. Despues de afianzada esta tabla detrás de un espejo con tornillos asegurados á su bastidor, se meten las clavijas en dos rajas hechas en la parte superior de las tablas verticales, y por medio de dos chapas por donde entran á rosca las clavijas, se puede asegurar el espejo con el grado de inclinacion necesario para que la pintura dé directamente en el papel puesto debaxo, y se conseguirá que sea distinta empujando ácia adentro ó ácia fuera el tubo que lleva la lente.

250. 504 En la cámara obscura portatil de que se hace muchísimo uso, los rayos que vienen del objeto *PQR* formarian, despues de atravesar la lente *E*, una imágen *pqr*, pero reflectiéndolos ácia arriba el espejo *ABC* forman una imágen orizontal *p'q'r'* igual con la primera, en un vidrio plano puesto orizontalmente, cuya cara sin pulir está vuelta ácia arriba, se bosquexa en este vidrio con lapiz la imágen que en él está pintada; y la vé derecha el expectador estando vuelto de cara al objeto. La figura representa una seccion de la máquina cortada en la direccion del exe del tubo que lleva la lente, por el medio de la caxa donde está el espejo, y del espejo mismo. El vidrio donde está pintada la imágen del objeto entrà de corredera en los lados de la caxa; y quando se quita, se mete en un caxon *ef* que hay en el fondo

do de la caxa; tambien es de quita y pon el espejo Fig.
ABC que entra de corredera en los lados de la mis- 250.
ma caxa, y se le mete en el mismo caxon. El tubo donde está asegurada la lente se mueve ácia atrás ó adelante lo que se quiere para que salgan distintas las imágenes. Las piezas *gh* é *ik* afianzadas unas con otras y con la caxa con aldabillas, se pueden quitar y meter dentro de la caxa. Cerrando últimamente la tapa *at*, y la parte superior de la caxa, queda la máquina muy facil de llevar. La tapa cuya seccion es *at* se compone de dos hojas que se abren en ángulos rectos, y descansan sobre los bordes de la caxa, para que hagan sombra á la imágen pintada en el vidrio.

De la Linterna Mágica.

505 *ABCD* es una linterna de cuyo lado sale un 251.
tubo *bnklmc* compuesto de dos partes que la una *nklm* puede correr por dentro de la otra; por manera que el tubo se puede alargar y acortar. En el extremo del tubo *nklm* hay un vidrio convexô *kl*; en *de* se pone un objeto *de* pintado con colores muy transparentes en un pedazo de vidrio delgado, por cuyo motivo se llama *transportaobjetos*; se coloca el vidrio de modo que el objeto esté trastornado; *bbc* es un vidrio muy convexô puesto al otro extremo del tubo, para juntar la luz de la llama *a*, y hacer que dé mas densa en el objeto *de* pintado en el vidrio. El vidrio *bbc* de ningun modo contribuye para la representacion, y solo sirve para alumbrar mucho la pintura *de*; esta es la razon porque en algunas de estas linternas, en lugar del vidrio *bbc*, hay un espejo cóncavo colocado de modo que junta la luz de la llama *a* en la pintura *de*; otras hay que llevan el espejo y el vidrio á un tiempo.

506 El objeto *de* está trastornado, y puesto algo

Fig. 251. mas allá del focus del vidrio *kl*; es, pues, evidente que este vidrio causará una imágen distinta *fg* del objeto en la pared opuesta *FH*, la qual suponemos blanqueada, y que esta imágen estará derecha. Porque como la luz está encerrada dentro de la linterna *ABCD*, todo el quarto *EFGH* está perfectamente obscuro; de modo que la apariencia que causa la linterna mágica viene á ser de todo punto lo mismo que diximos (501 y sig.) de la representacion de los objetos en la cámara obscura, causada por un vidrio convexô. Repárese que con acortar el tubo, el vidrio se acercará al objeto *de*, la imágen *fg* será mas ancha, é irá á estamparse mas lexos del vidrio *kl*; y por el contrario, si se alargare el tubo, de modo que el vidrio *kl* esté mas lexos del objeto *de*, la imágen *fg* será mas chica, y se estampará mas cerca del vidrio.

De los Anteojos comunes.

507 Con las lentes se hacen los anteojos para las personas cortas de vista, que no vén distintamente sino los objetos muy cercanos, y los anteojos para las personas que no vén distintamente sino los objetos muy apartados. Los hombres de vista corta, conocidos con el nombre de *myopes*, suelen tener la cornea mas convexâ de lo que es menester para que los rayos despedidos por los objetos, y que se introducen en sus ojos, se junten, despues de refringidos por los humores del ojo, á la distancia competente de la niña, para que salga distinta la imágen del objeto. Se juntan estos rayos antes de llegar á la retina, por causa de la extremada refraccion que padecen al atravesar la cornea sobrado convexâ. Es, pues, preciso, para que un myope vea claro un objeto qualquiera, hacer que los rayos que se han de in-

introducir en su órgano sean algo mas divergentes, Fig.
porque este exceso de divergencia hace que la sobrada convexidad de la cornea no los junte dentro del órgano, sino donde es menester.

508 Ya que para socorrer á los myopes se necesitan vidrios que encaminen los rayos de luz á sus ojos con mayor divergencia que la natural, sus anteojos han de ser lentes cóncavas, las quales por lo dicho (419), tienen la propiedad de hacer divergentes los rayos; con escogerlos de una curvatura correspondiente, los rayos incidentes adquieren al atravesarlos el grado de divergencia con el qual han de entrar en los ojos, para no juntarse sino en el fondo del órgano donde han de pintar la imágen.

509 Las personas que solo vén distintamente los objetos distantes, se llaman *presbytes*. Suele provenir este defecto, que es el de la gente anciana, de haberse secado los humores del ojo con la edad ó en alguna enfermedad, de modo que con la diminucion de su volumen, la cornea y el cristalino se aplanan, la luz no padece una refraccion bastante fuerte, y por una consecuencia forzosa, las puntas de los manojos luminosos no se juntan en el fondo del ojo, sino mas allá; y la imágen, lexos de componerse de puntos distintos que representen los puntos correspondientes del objeto, no es mas que un agregado de círculos luminosos, los quales cogen unos encima de otros. Por este motivo se vé confusamente el objeto.

510 Luego necesitan los presbytes de anteojos convexos que suplan la falta de convexidad de sus ojos; como hacen mayor la suma total de las refracciones, son causa de que los rayos converjan mas de lo que hubieren convergido (419). Y quando estos anteojos tienen el grado correspondiente de convexidad, el punto de concurso de los rayos de cada manojo dá puntualmente en el fondo del ojo.

No

Fig. 511 No es posible enmendar con anteojos los defectos de la vista, sin conocer primero los límites de la vision confusa y distinta, esto es, las distancias donde un objeto empieza á ser confuso para los presbytes, midiendo la menor distancia, á la qual pueden ver distintamente, y leer un caracter de letra mediano; y para los myopes, midiendo la mayor y menor distancia á las quales pueden ver distintamente, y leer un caracter de letra menudo.

252. 512 Sea Eq la mayor distancia á que un presbyte vé distintamente un objeto pequeño, y EQ la menor distancia á que le quiere ver tambien con claridad. Tómese del lado de q una tercera proporcional QF á Qq y QE; será EF la distancia focal de una lente convexá (449), con la qual podrá ver distintamente un objeto puesto entre Q y F, y quizá mas allá de F.

Porque los rayos que vienen de Q saldrán del vidrio y se introducirán en el ojo como si viniesen directamente desde q al ojo (416); y suponiendo que Q se aparte del ojo, tambien q se apartará al infinito recorriendo succesivamente los diferentes sitios en los quales la vista sola puede ver distintamente; y así, como los rayos refractos tendrán la misma divergencia que si viniesen de dichos sitios, procurarán una vision distinta del objeto puesto, donde se quisiere, desde Q hasta F.

513 Luego si un presbyte quiere ver distintamente á una distancia la mitad menor que Eq, esto es, dos veces mas cerca que con los ojos solos, el vidrio que mas le acomodará será una lente convexá, cuya distancia focal sea Eq, y verá distintamente con esta lente á qualquiera distancia que no sea menor que la mitad de Eq. Porque si suponemos iguales las Qq y QE, la proporcion antecedente nos está diciendo que el punto F coincide con q.

Sea

514. Sea EF la mayor distancia á la qual un myope puede ver distintamente un objeto puesto en F; será EF la distancia focal del mejor vidrio cóncavo que pueda usar para ver distintamente los objetos distantes. Fig. 253.

Porque los rayos de un manojo que vienen de un objeto distante, y dán por consiguiente paralelos en la lente, saldrán de ella para entrar en el ojo, como si vinieran directamente al ojo solo desde un objeto puesto en F. Por consiguiente, la imágen de un objeto distante estampada en el fondo del ojo por rayos refringidos en dicha lente, será tan distinta como la de un objeto puesto en F, mirándole con rayos directos.

515. Sea EQ la menor distancia á la qual el mismo sugeto vé distintamente un objeto con la vista sola; si tomamos una tercera proporcional Qq á QF y QE, y tiramos Qq del lado de F, el punto q será el punto mas inmediato donde podrá ver distintamente con la lente de que acabamos de hablar. 254.

Porque por lo dicho (449) los rayos de un manojo que dán en la lente convergentes ácia Q, convergirán despues de las refracciones ácia q; y al contrario los rayos que vinieren de q, saldrán de la lente divergentes respecto de Q. Y suponiendo que el punto q se aparte del ojo, el punto Q se apartará tambien pasando por todos los puntos que el ojo solo puede ver distintamente. Por el contrario, si el punto q se acercare al ojo, el punto Q se le arrimará tambien, pero ya no se le verá distintamente por el supuesto con la vista sola.

516. Por consiguiente, si el espacio QF comprehendido dentro de los límites de la vision confusa, no fuere menor que QE, veremos distintamente con un vidrio cuya distancia focal sea EF, los objetos colocados donde quisiésemos mas allá de F, cuyo

Fig. punto determina el alcance de la vista sola. Porque
254. en este caso Qq no puede ser mayor que QF, segun lo evidencia la última proposicion.

517 Pero si un myope quiere anteojos de vidrios cóncavos para leer ó escribir; supongamos que la distancia Eq no sea mayor de lo que es menester
255. para este fin, y que QF sea el intervalo comprehendido entre los límites de la vision confusa; tómese del lado de q una tercera proporcional FG á Fq y EF; un vidrio cóncavo cuya distancia focal fuese EG será el mejor que pueda usar para leer y escribir.

Porque de lo dicho (449) consta que los rayos de este manojo, que caen sobre dicho vidrio convergentes ácia F, convergirán ácia q despues de las refracciones; y al contrario, rayos que vinieren de q saldrian divergentes de F. Por consiguiente, el myope verá distintamente un objeto tan distante como q; tambien le verá mas cerca que F, si QF fuese la mitad no mas de EF. Porque si suponemos que los rayos dán en la lente convergentes ácia Q, hágase $QG : QE :: QE : QH$; los rayos refractos convergirán ácia H, y por consiguiente el punto H será el punto mas inmediato que se pueda ver distintamente con la lente. Pero si Q partiese EF por medio, es evidente que QH será menor que QF; porque QG, QF, QH están en proporcion continua.

Del Microscopio.

256. 518 Llamamos *microscopio* un instrumento que aumenta extraordinariamente el tamaño de los objetos por medio de una ó muchas lentes combinadas, y manifiesta los menos perceptibles. Quando el microscopio no lleva mas que una lente ó una bolita de vidrio, cuya distancia focal es muy corta, se llama *microscopio simple*.

Un

519 Un objeto chico pq que vemos distintamente Fig. con el auxilio de una lentezuela AE, á la qual se 256. aplica el ojo, parece tanto mayor de lo que pareceria á la vista sola, si el ojo estuviera á la menor distancia qL, desde donde le puede ver distintamente, quanto esta última distancia qL es mayor que la primera qE.

Porque despues de arrimado el ojo á la lente EA, apártese ó arrímese el objeto pq hasta que se le vea muy distintamente, y supongamos que esto se consiga á la distancia Eq; si nos figuramos que se quite despues la lente AE, y se ponga en su lugar una chapa agugereada con un alfiler; el objeto parecerá tan distinto y grande, como quando se le miraba con la lente; no habrá mas diferencia sino en que no tendrá tanto resplandor, en cuyo último caso parecerá mayor que mirándole con la vista sola, á la distancia qL, en la razon del ángulo pEq al ángulo pLq (496); ó de la última distancia qL ó la primera qE (491).

520 Una vez que la interposicion de la lente no causa otro efecto que hacer distinta la apariencia, refringiendo los rayos de cada manojo, quanto es menester para que despues puedan juntarse en el fondo del ojo; es evidente que el objeto no parece tan amplificado, sino porque se le vé mas distintamente á una distancia mucho menor que con la vista sola. Si el ojo está bastante bien conformado para ver distintamente con manojos de rayos paralelos, la distancia Eq del objeto á la lente es entonces la distancia focal de dicha lente (421). Si la lente fuese un globulillo de $\frac{1}{15}$ de pulgada de diámetro, siendo entonces su distancia focal Eq los tres quartos de su diámetro (457), será de $\frac{1}{20}$ de pulgada; y si qL fuere de 8 pulgadas, distancia regular á la qual vemos los objetos chicos, el globulillo amplificará el ob-

Fig. objeto en la razon de 8 á $\frac{1}{20}$ ó de 160 á 1.

256. Estos globulillos se hacen con mucha facilidad, poniendo á derretir un fragmento ó pedacito muy chico de vidrio puro á la llama azul de una bugía, puesto en la punta de una aguja mojada donde se mantiene pegado. Puede servir de microscopio una gota de agua metida con la punta de una pluma cortada para escribir, en un agugero redondo hecho en una chapa de cobre muy delgada.

Del Microscopio doble.

257. 521 El *Microscopio doble* se compone de dos vidrios convexôs dispuestos como representa la figura, el uno en *E*, el otro en *L*. El vidrio *L* inmediato al objeto *PQ*, por cuyo motivo se llama el *obgetivo*, es muy chico y convexo, y por consiguiente su distancia focal *LF* es muy corta; la distancia *LQ* del objeto *PQ* es algo mayor que *LF*, de suerte que la imágen *pq* se puede formar á una distancia muy grande del vidrio (421), y puede sér por consiguiente mucho mayor que el objeto mismo (430). Mirando esta imágen *pq* por un vidrio convexô *AE*, al qual por estar del lado del ojo se le llama *el ocular*, cuya distancia focal es *qE*, parece muy distinta, y se consigue ver el objeto mucho mayor de lo que es con efecto por las razones siguientes.

La primera, porque si miramos su imágen *pq* con la vista sola, nos parecerá mucho mayor que el objeto mirándole á la misma distancia, en la razon de *Lq* á *LQ* (430). La segunda, porque dicha imágen mirada por el ocular parece amplificada en la razon de la distancia menor á la qual se le puede ver distintamente con la vista sola, á la distancia focal *qE* del ocular (519). Si esta última razon es v. gr. la de 5 á 1, y la de *Lq* á *LQ* es la de 20 á 1, com-

componiendo estas razones hallarémos que el objeto nos habrá de parecer 100 veces mayor que con la vista sola. Fig.

Del Microscopio solar.

522 Este microscopio es una especie de linterna mágica alumbrada con la luz del sol; no hay mas diferencia sino la de que no representa como la linterna mágica un objeto pintado en un vidrio, sino un objeto verdadero puesto entre dos talcos, ó encima de uno solo, y que en lugar de dos lentes puestas mas allá del transportaobjetos, no tiene mas que una de un focus mas corto. Para hacer uso de este microscopio, se le aplica á una puertaventana en que dén los rayos del sol, estando muy cerrado y obscuro el quarto. Aumenta este microscopio los objetos tanto, que no es posible se lo figuren los que no lo han visto; la imagen de una escama de lenguado coge 12 ó 15 pies de largo, y 7 ú 8 de ancho: una pulga estrujada parece tan grande como un carnero; un cabello se vé tan grande como un palo de escoba; la imágen de un piojo suele ser de 5 ó 6 pies.

En quanto á la descripcion de este microscopio, la omito aquí por ser muy larga, y hallarse en el Tomo VI de mi Curso.

Del Anteojo astronómico.

523 El anteojo ordinario de que usan los Astrónomos se compone de dos vidrios convexôs. Representa *PQ* el radio de un objeto distante; *pq*, su imágen formada por un vidrio convexô *L* que, segun dexamos dicho (521), se llama el objetivo. En el exe prolongado de este vidrio *QLq* hay otro vidrio *EA*, llamado el ocular, mas convexô que el primero, cu- 258.

Fig. yo exe es tambien QLq, y su focus está en el pun-
258. to q donde está el focus del objetivo; por manera que EL es la suma de sus distancias focales. Estando dispuestos de este modo los vidrios, se verá el objeto distintamente, bien que trastornado, amplificado en la razon de qL á qE; esto es, en la razon que hay entre la distancia focal del objetivo y la del otro vidrio.

Porque como los rayos que divergen del punto q de la imágen pq son refringidos por el ocular, llegan al ojo puesto en O en direcciones paralelas al exe qEO, porque qE es la distancia focal del ocular; y por la misma razon, los rayos que divergen de otro punto qualquiera p de la imágen pq, salen del ocular despues de sus refracciones en A, paralelos al rayo pE (421) que es el exe de un manojo oblicuo de rayos, parte de los quales vá á dar en el ocular divergiendo de p. Así, como el ojo que vé distintamente por manojos de rayos paralelos, está en la interseccion comun O de dichos diferentes manojos, verá distintamente todos los puntos del objeto.

Por lo que mira á la magnitud aparente de la imágen pq, ó del objeto PQ, su medida es el ángulo EOA (496) ó su igual qEp; pero la magnitud aparente del objeto mirado con el ojo solo supuesto en L, tiene por medida el ángulo QLP ó su igual qLp, siendo recto el exe oblicuo PLp (416). Así, la magnitud aparente del objeto mirado con el anteojo es á su magnitud, mirándole con la vista sola, como el ángulo qEp al ángulo qLp, y por consiguiente como la última distancia qL es á la primera qE (491).

524 Quando alguna persona de vista corta quisiere observar con estos anteojos, y lo propio decimos de los microscopios, tendrá que arrimar un poco uno á otro los dos vidrios E y L, á fin de que los

ra-

rayos de cada manojo en lugar de salir paralelos salgan divergentes, y entren divergentes en el ojo; la magnitud aparente padecerá con esto alguna alteracion; pero será muy leve, y apenas reparable. Fig. 258.

525 El objeto que se vé trastornado en este anteojo, parece derecho y distinto, añadiéndole dos oculares mas, dispuestos el uno respecto del otro y respecto del primero, de modo que todos estén distantes uno de otro la suma de sus distancias focales. Si estas distancias focales fueren iguales, la amplificacion del objeto será la misma que antes.

Porque los manojos de rayos paralelos *EOF*, 259. *AOB* &c. formarán despues de atravesar el vidrio *FB* otra imágen *p'q'*, y el focus *p'* de un manojo oblicuo qualquiera *OB*, quedará determinado por la interseccion de la linea *p'q'* perpendicular al exe comun de los vidrios, y del exe oblicuo *Fp'* paralelo á los rayos incidentes *OB* (430). Como este punto *p'* es el focus de los rayos que ván á dar en el último vidrio *GC*, los rayos emergentes *CD* serán paralelos á su exe oblicuo *p'G*; porque se supone que los rayos procedentes de *q'*, salen paralelos al exe de los vidrios. Por consiguiente, si se coloca el ojo en *D*, donde todos los manojos de rayos paralelos se cortan mutuamente, se verá distintamente el objeto en su situacion natural (430). Quando los vidrios *F* y *G* son de todo punto iguales, la imágen *p'q'* está cabalmente en medio del espacio que los separa, y por lo mismo los triángulos *p'Fq'*, *p'Gq'* son iguales. Por consiguiente, el ángulo *CDG* que mide ahora (496) la magnitud aparente del objeto, estando el ojo en *D*, será igual al ángulo *p'Gq'*, ó á *p'Fq'*, ó á *BOF*, ó á *AOE*, el qual media la magnitud aparente quando el ojo estaba en *O*.

526 Quando se le añadieren los dos oculares iguales *BF*, *CG* al anteojo astronómico, conforme hemos

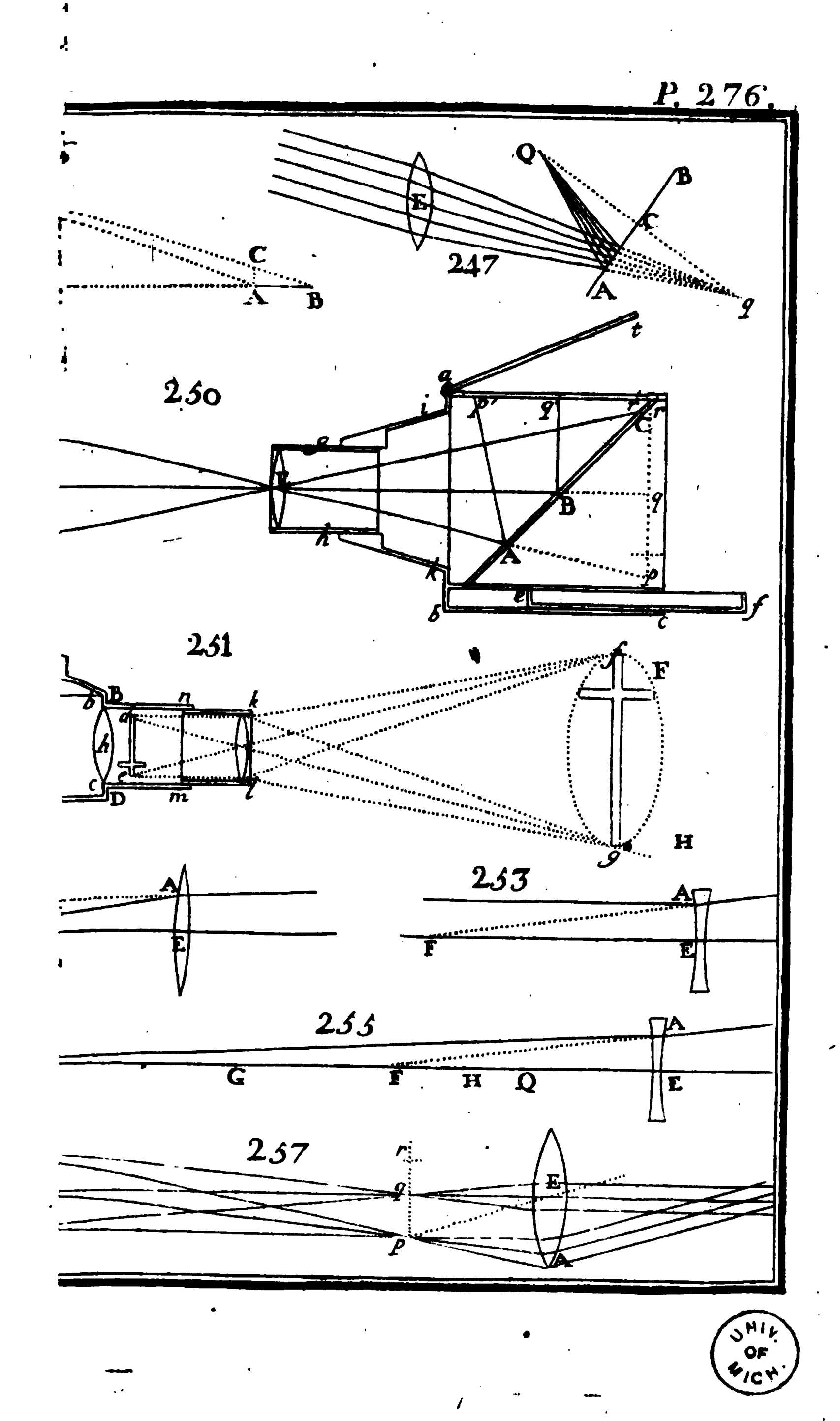
Fig. mos propuesto, y estuviere en *O* el focus comun de
259. los vidrios *AE*, *BF*, el rayo *AO*, despues de atravesar el vidrio *BF*, seguirá la recta *BC* paralela al exe (421); y por consiguiente, saldrá del último ocular, dirigido al focus principal *D* de dicho ocular (419); y estando allí el ojo, verá el objeto derecho y amplificado en la misma razon que antes. Porque siendo *GD* igual á *FO*, el ángulo *CDG* es igual al ángulo *BOF*, ó al ángulo *AOE*.

527. En lo dicho (523 y sig.) hemos supuesto el intervalo *LE* que separa los vidrios convexôs igual á
260. la suma de sus distancias focales. Supongamos ahora
261. el mismo intervalo mayor ó menor que dicha suma (524), y sea *EF* la distancia focal del ocular, *Lq* la del objetivo. Digo que la magnitud aparente será á la verdadera, como *LF* á *FE*; esto es, como el intervalo entre los dos vidrios menos la distancia focal del ocular, á la distancia focal del ocular.

Porque los exes de todos los manojos que pasan por *L*, como *PLA*, concurrirán despues de salir del ocular, al punto *G*, desde el qual, poniendo allí el ojo, se verá el objeto *PQ* en el ángulo *AGE*. Pero pudiéndose considerar *L* como un punto del qual salen rayos que dán en el ocular, tendremos *LF* : *LE* :: *LE* : *LG* (449), y por consiguiente *LF* : *FE* :: *LE* : *EG* :: el ángulo *EGA* es al ángulo *ELA* (491), ó *PLQ*; esto es, como la magnitud aparente á la verdadera.

528. De donde se sigue que conforme el intervalo de los vidrios fuese mayor ó menor que la suma de sus distancias focales, *la razon entre la magnitud aparente y la verdadera será mayor ó menor que la de sus distancias focales.*

529. *En un anteojo de una longitud determinada, la cantidad de objetos que se pueden abrazar con una*



C
A
B
E
247
Q
B
C
A
q
t
250
a
i
p'
q
r
C
g
E
B
q
h
A
k
p
e
b
c
f
251
f
F
B
n
k
b
d
h
c
e
D
m
l
g
H
253
A
A
E
F
E
255
A
G
F
H
Q
E
257
r
E
q
p
A

una mirada, lo que llamamos Campo del anteojo, *pende del ancho del ocular.* Fig.

Porque, conforme *AE* es mayor ó menor, el ángulo *ALE*, ó su igual *PLQ* es tambien mayor ó menor; y es evidente que este ángulo abraza todos los objetos que se puedan ver á un tiempo del mismo lado del exe del anteojo, cuyo exe es el exe comun de los vidrios que lleva su construccion. 258. 259.

No se puede disfrutar todo el efecto del anteojo con dexarle al ocular todo su ancho, porque la luz que dá en sus bordes no se refringe con tanta regularidad como la que dá en su medio.

530 *La apariencia de un objeto visto con un anteojo ó microscopio dado, es mas ó menos clara á proporcion de la abertura del objetivo.*

Porque, si suponemos tapado todo el objetivo á excepcion de un corto espacio en medio, no padecerán alteracion alguna las magnitudes de las imágenes *pq* formadas en el focus de los vidrios, ni las de las imágenes pintadas en el fondo del ojo. Pero si se achica la abertura del objetivo, cada manojo se compondrá de menos rayos, y por consiguiente concurrirán en menor número para formar cada punto de las imágenes, con lo que parecerán mas obscuras. Si se le dexa constantemente á un mismo objetivo su abertura, parecerá que los objetos tienen mas ó menos resplandor, conforme fuere mas ó menos larga la distancia focal del ocular; quiero decir, conforme el anteojo amplifique mas ó menos (521 y 523). Porque una misma cantidad de luz tendida en una imágen ó parte del ojo mayor ó menor, hace que la imágen sea mas clara ó mas obscura.

531 El *anteojo batávico* ó de *Galileo* se distingue del astronómico, en que en vez de colocar un ocular convexó entre el ojo y la imágen para conseguir que sean paralelos los rayos de cada uno de los manojos 262.

Fig. que han de entrar en el ojo, lleva un ocular cónca-
262. vo AE, puesto entre el objetivo y la imágen, á la misma distancia de la imágen que el primero, ó, lo que es lo propio, de manera que su focus coincida con el del objetivo. Este ocular aparta los rayos de cada manojo, que concurrirían en q y p, cabalmente quanto es menester para que sean paralelos y paralelos entren en el ojo; lo que es evidente si nos figuramos que los rayos vuelvan atrás, y vayan á atravesar otra vez el ocular, cuya distancia focal suponemos que sea Eq. A fin de que introduzcan estos anteojos en el ojo el mayor número posible de manojos, es menester aplicarle inmediatamente al ocular; y si en este caso suponemos uno de los rayos emergentes de un manojo oblicuo, prolongado en la direccion AO, la magnitud aparente del objeto visto con el anteojo se me dirá con el ángulo AOE (496) ó su igual qEp, el qual tiene con el ángulo qLp ó QLP que mide la magnitud aparente con la vista sola, la misma razon que qL con qE, del mismo modo que en el primer anteojo (523). Con este anteojo se vén los objetos en su situacion natural.

532. El campo de este anteojo no pende del anchor del ocular como en el anteojo astronómico; pende sí del anchor de la pupila; porque la pupila es menor que el ocular, y los manojos laterales se ván apartando del exe del vidrio en vez de acercársele. Por esta razon este anteojo no coge tanto campo, y no es de un uso tan acomodado.

533. Por ser la pupila naturalmente muy pequeña, y angostarse todavía mas á proporcion de la luz que la hiere (478), se sigue que el campo de este anteojo es tanto menor, quanto mas luminoso es el objeto y mas largo el focus del ocular. Y como no se pueden usar oculares de un focus tan corto como

se

se quisiera, porque entonces sería muy poca la claridad de las imágenes estampadas en el fondo del ojo, y sería confusa la vision (488); y porque á medida que es mas largo el focus de los objetivos, se ha de aumentar el de los oculares, se echa de ver que quanto mas largo es este anteojo, tanto menos campo coge. Fig. 262.

Del Telescopio.

534 Bien que la voz *telescopio* significa en general todo instrumento construido para ver desde lexos, solo significa los instrumentos compuestos de dos vidrios, y sirven para ver objetos por rayos reflexos.

535 *El telescopio de reflexion inventado por Newton aumenta el diámetro de un objeto distante en la razon de la distancia focal del espejo á la del ocular, y con él se vé el objeto trastornado.*

Sea *ST* la imágen de un objeto distante *PQ* formada por la reflexion que padecen los rayos al dar en un espejo cóncavo grande *AC*, y terminado por las lineas *PESA*, *QETC*, tiradas por su centro *E*. Como aquí no se puede ver la imágen por medio de un ocular colocado directamente delante de ella, porque se interceptarian los rayos que dán en el espejo, se pone entre el espejo grande y la imágen, un espejo chico plano *ac*, inclinado 45° al exe del espejo grande, á fin de dar una direccion mas acomodada á los diferentes manojos de rayos que vienen del espejo *AC*, precisándoles á reflectirse de lado, al dar en el espejo chico. De esta nueva reflexion resulta otra imágen *st*, igual con la primera *ST* (383). 263.

Sea *tl* la distancia focal de un ocular chico convexô *kl*; los rayos que vienen de un punto qualquiera *s*, saldrán de dicho ocular dirigidos al punto *o*, donde suponemos que esté el ojo, en las direcciones de las lineas *ko* paralelas al exe oblicuo *sl* (421);

Fig. 263. así, la magnitud aparente del objeto *PQ*, respecto del ojo puesto en *o*, se medirá con el ángulo *kol* ó *slt* (496), siendo así que con la vista sola, puesto el ojo en *E*, se mide con el ángulo *PEQ* ó *SET*. Luego la magnitud aparente del objeto visto con el telescopio es á la magnitud aparente, mirándole con la vista sola, como el ángulo *slt* es al ángulo *SET*, ó, porque las subtensas *st*, *ST* son iguales, como *ET* á *lt* (491), ó como *CT* á *lt* quando el objeto está muy distante (384).

La imágen del objeto está trastornada por lo dicho (430). Como este telescopio se compone de vidrios y espejos se llama *catadióptrico*.

536 Ocurrióle á Newton el pensamiento de este telescopio en vista de dos obstáculos muy grandes que se oponen á la perfeccion de los anteojos ó telescopios dióptricos. El uno proviene de la figura esférica de los vidrios, que no consiente se junten sensiblemente en un mismo punto sino los rayos inmediatos al exe (409). Los demas que están á alguna distancia de dicho exe, le encuentran antes, y como pasan mas ó menos cerca del punto donde concurren los primeros turban la imágen y la pintan confusa y mal terminada. Este inconveniente se remedia con dar poca abertura á los objetivos; porque cerrándoles con esto á los rayos muy apartados del exe la entrada del anteojo, no pueden turbar la imágen.

537 El otro obstáculo proviene de la heterogeneidad de la luz, que es causa de que al atravesar los vidrios se divide en rayos de colores y refringibilidades diferentes (460 &c.); de donde resulta que las imágenes formadas por refraccion están terminadas por franjas coloreadas, que hacen dudoso su tamaño. Los Matemáticos é Ingenieros ópticos de varias naciones se han afanado mucho para remediar

este defecto, y hacer anteojos *acromáticos*, esto es, Fig.
que dén imágenes sin franjas coloreadas. Lo mejor que acerca de esto se habia publicado hasta el año de 1774 está extractado en el Tomo VI de mi Curso.

538 Muchos años antes que Newton inventase su telescopio de reflexion, *Jayme Gregori* habia discurrido otro. Daremos su descripcion qual se hace hoy dia con dos espejos esféricos cóncavos de metal, y un ocular convexô.

Sean t, T, q respectivamente las distancias foca- 264.
les dadas del espejo chico, del grande y del ocular, y en una linea recta $ctqCl$ que les sirve de exe comun, tómense del mismo lado y en la misma direccion, $ct = t$, $tq = T$, $qC = \frac{t \times t}{T}$, y $ql = q$, plántese despues el ocular en l, el espejo chico en c, y el grande en C, de manera que las concavidades de estos espejos estén vueltas una ácia otra. Supongamos ahora que los rayos incidentes QA, QB sean reflectidos por el espejo grande al chico, y que este se los vuelva á reflectir. Si en medio C de dicho espejo se hace una abertura mediana por donde puedan pasar los rayos reflectidos por el espejo chico, las refracciones que padecerán al pasar por el ocular kl los hará paralelos; digo, pues, que si se pone el ojo en un punto o de su direccion, se verá distintamente un objeto distante en su situacion natural, y amplificado en la razon del quadrado de la distancia focal del espejo grande, al rectángulo de las distancias focales del chico y del ocular.

Porque los rayos QA, QB de un manojo, paralelos al exe del telescopio, se juntarán en el focus principal T del espejo grande (384); despues de cruzarse allí, irán á dar en el espejo chico acb, el qual los reflectirá al punto q. Porque ya que la distancia focal $TC = T = tq$ por construccion, si quitamos de cada lado la parte comun Tq, quedará $Tt = qC = \frac{t \times t}{T}$

por

Fig. por construccion; quiero decir, que tendremos *tT*, *tc*, *tq* en proporcion continua, y así debe ser (392). Y como *ql* es la distancia focal del ocular *kl*, los rayos que vienen de *q* saldrán paralelos, y formarán por consiguiente una imágen distinta del punto *Q* de donde habian salido.

265. 539 Si *ST* es la imágen del objeto *PQ* formada por la reflexion que se hace en el espejo grande, será terminada por la recta *PES* tirada por el centro *E* de dicho espejo paralelamente á los rayos *PA*, *PA* que vienen de *P* (398). Los rayos que desde la imágen *ST* ván á dar en el espejo chico se reflecten allí, y forman despues otra imágen *pq*, que será terminada por la recta *Sep* tirada por el centro *e* de dicho espejo chico (398); y los rayos que divergen de *p*, saldrán del ocular *kl* en la direccion de lineas rectas *ko* paralelas á *pl*, tirada por el centro del ocular (419). Así, el objeto *PQ* parecerá derecho, porque los rayos *ko* están á un mismo lado del exe comun *Qlo*, con el punto *P* de donde salieron (430).

540 Tómese en la segunda imágen *pq* una linea *qs* igual á la primera imágen *ST*; si la imágen *pq* fuese igual con *qs*, se vería el objeto por el ocular en un ángulo igual á *qls* (496) que tiene con el ángulo *PEQ* ó *SET*, en el qual se le vería desde *E* con la vista sola, la misma razon que *TE* ó *TC* (384) con *ql* (491); por consiguiente, la amplificacion del objeto se haría en la misma razon que en el telescopio Newtoniano. Pero como los triángulos *eqp*, *eST* son semejantes, y tenemos $tq : te :: te : tT$ (392), y por consiguiente $tq : te :: eq : eT :: pq : ST$ ó *qs*, se echa de ver que *pq* es mayor que *qs*, y que por lo mismo el ángulo visual *kol* ó *plq* es mayor que *qls* en la razon de *tq* á *te*. Luego, siendo el objeto mas amplificado de lo que hemos supuesto, en la razon de *TC* á *tc*, la amplificacion total seguirá la razon del qua-

quadrado de *TC* al producto de *tc* por *ql*. Fig.

541 Para ver con este telescopio objetos cercanos, se ha de apartar un poco el espejo chico del grande, y es facil conseguirlo, porque siempre se le dexa mobil. Esto proviene de que mientras un objeto distante se acerca, su imágen *TS* se acerca á *t* (387), y menguando *tT* su recíproca *tq* crece (538).

542 Luego si un myope quiere usar de este telescopio, como el ocular suele estar fixo, es preciso que arrime un poco el espejo chico al grande, porque con esto el intervalo *tT* mengua, y su recíproca *tq* crece. Luego los rayos darán en el ocular divergiendo de un punto menos distante que su distancia focal; por consiguiente saldrán divergentes, y divergentes entrarán en el ojo.

543 Estando todas las cosas aseguradas en su lugar, el diámetro de un objeto que se puede ver en una sola ojeada es proporcional á la latitud del ocular, suponiendo sin embargo que la abertura del espejo grande no limite la apariencia del objeto. Porque, como el ángulo de reflexion *pce* en medio del espejo chico, es igual al ángulo de incidencia *ecS*, es patente que mientras *pq* y *kl* crecen ó menguan en una razon qualquiera, la imágen *ST* y el objeto *PQ* tambien crecen ó menguan en la misma razon.

544 Sentado esto, si se le dá mucho diámetro á 266.
un ocular de una distancia focal y curvatura dadas, 267.
llegará á ser muy grueso. Así los rayos que cayeren en sus bordes, le encontrarán muy oblicuamente, y por causa de esta oblicuidad se reflectirán muchos, y los que pasaren, padecerán refracciones muy grandes respecto de las que padecerán los manojos que pasaren por el medio de la misma lente (415). Por lo que, si se quiere aumentar el número de partes visibles de un objeto, se debe procurar que su imágen *pq* cayga detras del espejo grande á la distancia de

dos

Fig. dos ó tres pulgadas de la abertura, y precisar los
266. rayos que ván á formar dicha imágen, á que pasen
267. por un vidrio convexô *fg* muy delgado y ancho, colocando este vidrio detrás y arrimado al espejo grande. Este vidrio aumentará indispensablemente la convergencia de los rayos, los quales por lo mismo formarán una imágen *ux* mas cerca del mismo vidrio, y menor que la imágen *pq*, y á ambas las terminará la recta *pug* tirada por el centro del vidrio (430). Como los rayos de cada manojo divergirán de la nueva imágen *ux*, se les presentará despues otro vidrio convexô *bi* que los haga paralelos, y haga que entren paralelos en el ojo. Será mucho mejor valerse de un menisco, cuya convexidad esté vuelta á los rayos incidentes *fub*, porque los rayos atravesarán sus bordes con menos oblicuidad que si pasasen por un vidrio de otra figura qualquiera.

545 Para impedir que entren en el ojo los rayos colaterales que, pasando por los lados del espejo chico, se introducen por la abertura del grande, como tambien los que son reflectidos por los bordes imperfectos de dichos dos espejos, se ha de poner en el lugar *x* de la imágen, una superficie delgada y chata que tenga un agugero de un diámetro igual al de dicha imágen, y hacer otro agugerito en *o*, donde se crucen todos los manojos antes de introducirse en el ojo. El diámetro del agugerillo no debe ser mayor que el del manojo principal en *o*; es tambien muy esencial determinar con suma puntualidad los sitios donde han de estar estos dos agugeros; porque sin este cuidado no hay ningun buen efecto que esperar del telescopio.

268. 546 Si la distancia focal del espejo chico fuese igual á una linea dada *t*, y se le quisiere colocar de modo que reflecta á un punto dado *q* los rayos que le llegan del fócus dado *T*, se habrá de dividir la *Tq* en

en dos partes iguales en m, y levantarle á mT una perpendicular Tn igual á la distancia focal t; tirando despues mn, se tomará del lado de T, la $mt = mn$, y t será el punto donde habrá de caer el focus del espejo chico. Fig.

Porque, si desde el centro m, y con el radio mn ó mt trazamos un semicírculo que corte otra vez el exe en z; será $qz = Tt$, y por lo mismo $Tz = tq$. Tambien será Tn media proporcional entre los segmentos tT, Tz del diámetro tz; quiero decir, que la distancia focal t ó tz es media proporcional entre tT y tq. Así, los rayos que vienen de T, serán reflectidos por el espejo chico al punto dado q (392).

547 Y si quisiéramos averiguar la distancia focal del espejo chico, el qual teniendo su focus en el punto t, reflecte los rayos que le llegan de un punto T, á un punto dado q, dividiríamos Tq en dos partes iguales en m, y desde el centro m, y con el radio mt trazaríamos un círculo que cortase en un punto n una perpendicular indefinita levantada en T, y sería Tn igual á la distancia focal que se buscase.

548 Supongamos que dados el espejo grande, el ocular convexô, y el intervalo Tq entre las dos imágenes de un objeto distante, se pida la distancia focal del espejo chico, y el lugar donde se ha de colocar para que el telescopio aumente el objeto en la razon que se quiere. Como la razon dada se compone de la razon dada entre CT y ql, y de la de tq á et (540), esta última razon tambien será dada, y poniendo en su lugar la de n á 1, tómese tT á Tq en la razon de 1 á $nn-1$, y saldrá tT; tomando despues tc á tT en la razon de n á 1, se sacará la posicion y magnitud de tc.

Porque, como las lineas incógnitas tT, tc, tq, están en proporcion continua en la razon dada de 1 á

Fig. á n, tendremos $tT : tq :: 1 : nn$, y por consiguiente $tT : Tq :: 1 : nn-1$.

549 En algunas ocasiones suelen llevar estos telescopios un espejo chico convexô en lugar de un espejo cóncavo. Si sus distancias focales son iguales, y se coloca el vértice del espejo convexô *de* en el punto *e* donde estaba el centro del cóncavo, el telescopio amplificará en la misma razon que antes, pero representará el objeto trastornado. Le representará derecho si se le pusieren tres oculares convexôs, como en los anteojos.

Porque, quando los rayos de un manojo que ván convergentes desde el espejo grande á su focus T, dieren en el espejo chico convexô *de*, este los reflectirá al mismo punto q adonde los reflectía antes el espejo chico cóncavo *bc*. Pues siendo el punto t el focus principal de estos dos espejos, tendremos tT, te (ó tc), y tq en proporcion continua como antes (392). Por un punto qualquiera S de la primera imágen ST, y por el centro e del espejo cóncavo chico tírese la Sep que termine la imágen pq formada por dicho espejo (398): por el centro c del espejo chico convexô *de*, y el punto S tírese la cSr que termina la imágen qr formada por este espejo. Las imágenes qp, qr están en distintos lados del exe, y por consiguiente el objeto parecerá en posiciones opuestas. Pero por ser iguales estas imágenes, es constante que se verá el objeto igualmente amplificado.

Porque, tenemos $tq : te :: te : tT :: tq \mp te : te \mp tT$, esto es, $:: eq : eT :: cq : cT$. Y por ser semejantes los triángulos peq, TeS, y los triángulos qcr, TcS, tendremos $pq : ST :: eq : eT :: cq : cT :: qr : ST$, y por consiguiente $pq = qr$.

PRIN-

PRINCIPIOS
DE ASTRONOMÍA.

550 AVeriguar los movimientos actuales, pasados ó venideros de los cuerpos celestes, las circumstancias que los acompañan, y los fenómenos ó apariencias que de ellos resultan, este es el objeto de la Astronomía; para conseguirlo se vale de la observacion y del cálculo. Entre los cuerpos celestes se reparan unos cuya luz es sumamente viva, que llamamos *estrellas fixas*, porque no se percibe variacion alguna en la distancia que hay entre ellas. Otros hay que corresponden succesivamente á diferentes puntos de la concavidad del firmamento, variando tambien la situacion en que están unos respecto de otros, su luz es menos viva que la de las estrellas, y se les dá el nombre de *planetas primarios*. Llámanse así para distinguirlos de otros planetas que siguen y acompañan á algunos de ellos, de los quales parece que tienen alguna dependencia, por cuya razon se llaman *planetas secundarios* ó *satélites* de los principales. Fig.

551 Señala, pues, la misma naturaleza de los cuerpos celestes el orden que hemos de seguir en estos principios; quiero decir, que nos tocaría tratar primero de las estrellas, despues de los planetas primarios, y últimamente de los satélites. Pero como el sol, sobre ser el mas reparable de los astros que conocemos, ocupa el centro del movimiento de los planetas primarios, es acreedor á que se trate separadamente quanto pertenece á sus apariencias. Y como los planetas en el discurso de sus revoluciones llegan á estar en tal situacion que se obscurecen unos á otros, interceptando la luz con que los baña el sol,

de

Fig. de donde resultan los eclipses, ocupará tambien este asunto un lugar separado; finalmente, para completar en lo que cabe este tratado, añadiremos lo que se pudiere acerca de los cometas.

Es, pues, mi ánimo tratar 1.° de las estrellas fixas. 2.° del sol. 3.° de los planetas principales. 4.° de los planetas secundarios. 5.° de los eclipses. 6.° de los cometas.

552 Con la mira de desempeñar este plan con la claridad que deseamos, ventilarémos por vía de preliminar algunos puntos indispensables para la cabal inteligencia de los ramos que componen el dilatado y curioso asunto que abraza.

PRELIMINARES.

553 I. Llegó ya el caso de hacer mucho uso de ambas Trigonometrías. Pero como en lo que dexamos declarado sobre esta materia, hemos omitido algunas proposiciones que tienen su principal aplicacion en la Astronomía, les daremos el primer lugar en estos preliminares.

554 II. Los movimientos de los astros se refieren á los círculos que han imaginado los Astrónomos en la concavidad de la bóveda celeste, cuyo conjunto forma lo que llaman la *esfera*, de la qual es una representacion un instrumento muy vulgar conocido con el mismo nombre; y no es posible se haga cargo de las apariencias celestes el que no estuviere enterado de los círculos de la esfera, de sus usos y origen.

555 III. Un punto esencialísimo para el que se dedica al estudio de la Astronomía, es saber, si puede, el verdadero sistema planetario; esto es, como están colocados los planetas respecto del sol, y unos respecto de otros; y quando no le pueda averiguar, debe indagar por lo menos qual es entre los systemas

del

261

263

264

265

del mundo inventados hasta el dia de hoy el que tiene á su favor, ó mas Astrónomos acreditados, ó mas naciones ilustradas, ó mayores argumentos, ó dá mayor facilidad para explicar los fenómenos que reparamos en el cielo. Fig.

556 IV. La luz que nos hace perceptibles los astros, padece al entrar en la atmósfera refracciones que alteran sus apariencias. Es por lo mismo indispensable llevar en cuenta la cantidad de esta alteracion, y saberla determinar para no equivocar la realidad con la apariencia.

557 V. Todos los movimientos celestes se reducen, para mayor uniformidad, al centro de la tierra; quiero decir, que se supone el observador no en la superficie de la tierra donde está en realidad, sino en el centro mismo de nuestro globo. La diferencia que vá de la superficie al centro de la tierra causa en las observaciones una ilusion conocida con el nombre de *paralaxe*, á la qual se debe atender para executar la expresada reduccion.

Proposiciones trigonométricas.

558 Los senos hacen mucho papel en la Astronomía, y substituyen en muchísimos cálculos por los arcos á que pertenecen. Supongamos que un planeta ande una órbita *APBD* al rededor del centro *C*, y que esté en *O* el observador que quiere enterarse de su movimiento. El planeta, al apartarse de la linea de los centros *A*, trazará un arco *AP*, y al observador le parecerá que no se habrá apartado de la linea de los centros sino la cantidad *PE*, que es el seno del arco *AP* andado por el planeta. Quando hubiere andado 90° ó *AB*, se hallará á la distancia máxima del centro *C* respecto del observador, porque el mismo radio ó seno total *BC* será la distancia aparente 270.

Fig. 270. del planeta al punto *C*, en el supuesto de que el observador esté á una distancia sumamente grande del planeta. En pasando del punto *B* parecerá que vuelve á la linea de los centros, porque los senos como *FG* irán menguando (II. 325) del mismo modo que fueron creciendo en el primer quadrante de círculo *AB*, hasta que llegado el planeta á *D*, siendo de 180° el arco que hubiere andado, el seno ó la perpendicular se desaparecerá como en *A*.

Pasando el planeta al otro lado de la linea de los centros mas allá del punto *D*, el seno que fué menguando hasta cero, vuelve á crecer en la otra direccion con los mismos incrementos que en el primer quadrante.

559 Son, pues, en este caso los senos, y no los arcos andados por el planeta, la medida de su movimiento observado desde el punto *O*. Se hace preciso en estos casos acudir á las tablas de los senos, para averiguar á que distancia parecerá el planeta respecto de la linea de los centros *OACD* en diferentes tiempos de su revolucion ó en diferentes grados de su órbita.

560 Nos parece del caso recordar que por lo dicho (I. 707 y sig.) se sacará que los senos mudan de signo en el tercero y quarto quadrante del círculo, y los cosenos en el segundo y tercer quadrante.

561 Tambien recordarémos que quando el arco *AR* pasa de 90°, la tangente *AT*, la misma que la de su suplemento (II.325), muda de signo, bien que esté del mismo lado que el seno, porque el punto de concurso *T* de la tangente *AT*, y del radio *CT* cae al lado opuesto, hallándose en el radio *CR* prolongado mas allá del centro.

562 Para hallar el seno de un arco *ABDK* que pasa de 180°, basta quitarle 180°, y tomar el seno del arco *DK*, porque el seno de dos grados es el mis-

mismo que el seno de 182°, conforme lo está diciendo Fig.
la figura, donde la linea *KG* es el seno de *DK*, de *KA* y de *ADK*. Por consiguiente quando una cantidad varía como los senos, es nula á los 180°, y vuelve á crecer pasados los 180° del mismo modo que crecía desde cero; por la misma razon el seno de 380° es el mismo que el seno de 20°.

563 Importa tambien repetir que los senos son y se deben considerar como quebrados del radio. Las tablas de los senos no son en realidad (I. 714) mas que series de fracciones decimales, cuya unidad es el radio ó seno total, esto es, el seno de 90°. Hallamos v. gr. en las tablas que para 90° el seno es 100, y que para 30 es 50, ó la mitad de 100; podremos, pues, decir que el seno total es 1, y que el seno de 30° es $\frac{1}{2}$ ó 0,5 para darle la forma de decimal. Asimismo, el seno de 10° será 0,17 ó $\frac{17}{100}$ del radio ó del seno total considerado como unidad.

564 Luego, siempre que una cantidad fuere multiplicada por un seno, como quando decimos 2″. sen 30°, esta expresion significa que los 2″ son multiplicados por un quebrado, cuyo quebrado, es á saber sen 30°, es un medio (I. 705), porque siempre se supone que dicho seno se refiere al seno total, cuya parte es.

565 Supongamos que la distancia máxima de un planeta al centro *C*, ó el radio *CB* sea de 20″, podremos decir en general que su distancia aparente *PE* vista desde la tierra en otra posicion qualquiera de su órbita es igual á 20″. sen *AP*. Con efecto, quando el seno del arco *AP* ó la perpendicular *PE* fuere la mitad de *BC*, la distancia *PE* parecerá de 10″ no mas, porque 20″. sen *AP* será $20'' \times \frac{1}{2} = 10''$. Este es el modo corriente hoy dia de considerar los senos; y añadirémos que lo propio se estila con los cosenos, así 20″ cos 60° $= \frac{20''}{2} = 10''$, porque cos 60° $=$ sen 30° es lo mismo que $\frac{1}{2}$.

T 2 Por

Fig. 566 Por lo que mira á las tangentes, no son fracciones verdaderas sino hasta 45° (I. 706); pasados los 45° son números mayores que la unidad. Así, 20″ tang 56° 19′ = 30″, porque la tangente de 56° 19′ es igual á $1\frac{1}{2}$, conforme se verifica por medio de las tablas de los senos.

567 Acerca de los senos tenemos que hacer otra prevencion muy esencial. Si en un triángulo rectán-
271. gulo *ABC* tomamos por radio la hypotenusa *AB*, podremos expresar el lado *BC* con *AB* . sen *A*, y el lado *AC* con *AB* . cos *A*. Porque *R* : sen *A* :: *AB* : *BC* (I. 720) ó 1 : sen *A* :: *AB* : *BC*, una vez que siempre consideramos el radio como unidad; luego $BC = \frac{AB \cdot \text{sen} A}{1} = AB \cdot \text{sen} A$. Tambien tenemos 1 : sen *B* ó cos *A* :: *AB* : *AC*, esto es, *AC* = *AB*. cos *A*. Si sobre el radio *AB* trazamos un arco de círculo *DBG*, será patentemente *BC* el seno del arco *BD*; *AC* = *BE* es el seno del arco *BG* ó el coseno del arco *BD*, ó del ángulo *A*. Por consiguiente, si el seno *BC* del ángulo *A* fuese la mitad del radio *BA*, sería $BC = \frac{1}{2}AB$; luego en general, sea *BC* la fraccion que se quisiere del radio *BA*, su expresion será *AB* . sen *A*, pues sen *A*, segun dexamos dicho arriba, no es mas que un quebrado del radio, ó, lo que es lo propio, el radio multiplicado por un quebrado. Queremos decir finalmente que la perpendicular de un triángulo rectángulo es igual á la hypotenusa multiplicada por un quebrado, cuyo quebrado se halla en las tablas de los senos.

568 Hay otra expresion de los senos muy usada; el seno del ángulo *A* v. gr. ó del arco $BD = \frac{BC}{BA}$; cuya expresion viene á ser la misma que se saca de lo dicho (I. 720), porque *AB* es á *BC* como el radio es al seno del arco *BD*; y como siempre hacemos el radio = 1, tendremos *AB* : *BC* :: 1 : sen *BD*; lue-

luego sen $BD = \frac{BC}{BA}$. Lo propio se probará respecto Fig.
de los cosenos y de las tangentes. 271.

569 Síguese de aquí que si una misma linea recta correspondiere á dos arcos de diferentes radios, los quebrados que en las tablas expresan los senos de dichos arcos, estarán en razon inversa de los radios. Porque como sen *BD* es igual á *BC* dividida por el radio, si fuere *BC* una misma, siendo otro el radio, sen *BD* crecerá tanto mas quanto mas menguare el radio.

De los Círculos de la Esfera.

570 El primer fenómeno celeste que se llevó naturalmente la atencion de los hombres, es el movimiento *diurno* ó diario con el qual parece que se mueve el cielo, y dura 24 horas. Así vemos que el sol nace y se pone todos los dias.

571 El *orizonte* es aquel ámbito del cielo que reparámos al rededor de nosotros en forma de círculo, y limita la vista por todos lados, quando estamos en un sitio elevado. Este círculo divide el cielo en dos partes, pero solo vemos lo que está mas arriba del orizonte, los astros no se dexan ver sino quando llegan á este emisferio superior, y entonces decimos que *nacen*.

572 Quando se considera con cuidado continuado este movimiento general de los astros por espacio de una ó muchas noches, se repara que cada estrella anda un círculo en el discurso de 24 horas; las que están mas ácia el norte andan círculos menores que las otras, cuyos círculos ván menguando continuamente hasta desvanecerse y reducirse á un punto elevado del cielo, que llamamos el *polo del mundo*; el que nosotros vemos se llama el *polo boreal* ó *ártico*.

 Por

Fig. 573 Por consiguiente, el que quisiere formar juicio de los círculos de la esfera, debe en una noche muy serena enseñarse á conocer el polo del mundo. Hay en el cielo una estrella muy próxima á este punto llamada la *estrella polar*. Por estar esta estrella muy inmediata á dicho polo fixo, al rededor del qual las demas estrellas dán la vuelta cada dia, parece que está siempre en un mismo lugar á todas las horas del dia y todo el año; siendo así que las demas andan círculos al rededor de ella, la qual viene á ser el centro de sus movimientos.

574 La estrella polar es muy facil de conocer; un hombre por sí solo, aunque jamas haya observado el cielo, con tal que no le falte paciencia para observar parte de la noche las diferentes estrellas que están del lado del norte, reparando su situacion y altura respecto de campanarios, paredes ú otros objetos muy visibles, echará de ver muy presto que hay una estrella, la qual se mantiene con muy corta diferencia en un mismo sitio, y esta es la que llamamos *estrella polar*. Pero si esto no bastare enseñarémos otro modo de conocerla.

272. 575 En todos los paises es conocido aquel *grupo* ó conjunto de estrellas que el vulgo llama *el carro*, y los Astrónomos llaman *ursa mayor* ú *osa mayor*. Si se tira una linea por las dos estrellas mas distantes de la cola, señaladas α y β, esta linea prolongada del lado de la estrella α, pasará muy cerca de la estrella polar; que está á la misma distancia de la estrella α, que esta de la estrella η, la qual forma el extremo de la cola. En algunos tiempos del año está la estrella polar mas alta que la osa mayor, en otros está mas baxa. En el primer caso, el círculo que debe ir á encontrar la estrella polar deberá prolongarse mas arriba de la osa mayor; lo que sucede quando á principios de Noviembre miramos al norte á eso de las

ó horas de la noche. A principios de Mayo á la misma hora veremos la osa mayor en lo mas alto del cielo; y entonces deberá prolongarse ácia abaxo la linea que pasa por las dos estrellas precedentes del quadrado de la osa mayor, para encontrar la estrella polar. Esté donde estuviere el carro, la estrella polar siempre estará del lado de la estrella α ó del lado de la convexidad de la cola. Fig. 272.

576 En conociendo el polo del mundo, se distinguen facilísimamente los *puntos cardinales*; es á saber, el *norte*, el *sur*, el *oriente*, y el *occidente*. El norte ó septentrion es el lado al qual estamos de cara quando miramos el polo; el sur ó medio dia es el lado opuesto, aquel donde vemos el sol á la mitad del dia; el oriente ó leste, el poniente ú oeste están entre los dos puntos del norte y del sur, á distancias iguales de uno y otro, á ángulos rectos; el oriente del lado donde nacen los astros, y el poniente del lado donde se ponen.

577 El *zenit* es el punto que está directamente encima de nuestra cabeza, al qual vá á parar el plomo si nos le figuramos prolongado hasta la concavidad del cielo. Por ser el zenit el punto mas alto del cielo, está á 90° de todos los puntos del orizonte. Por consiguiente, quando un astro está 60° elevado mas arriba del orizonte, dista 30° del zenit, pues $60° + 30° = 90°$. Podremos, pues, decir que *la altura de un astro es el complemento de su distancia al zenit.*

578 El *nadir* es el punto inferior de la esfera celeste, diametralmente opuesto al zenit, el punto al qual se dirige el plomo con su gravedad natural. Si nos figuramos un círculo que dé la vuelta al cielo pasando por el zenit y el nadir, habrá 180° ó un semicírculo de un lado, y otro tanto del otro. A este círculo que pasare de este modo por el zenit y el nadir, le llamamos *círculo vertical*.

Fig. 273. 579 Quando desde un sitio muy patente se mira el cielo, se concibe que pues tenemos encima de nosotros una mitad de globo, hay otra mitad que no vemos. El emisferio visible ó superior está separado del invisible ó inferior por el orizonte; *es, pues, el orizonte un círculo máximo de la esfera que en cada lugar de la tierra separa la parte visible del cielo de la que no se vé.* A este orizonte se le llama *racional* ó *matemático* para distinguirle del orizonte *sensible*, el qual es un plano paralelo al orizonte racional, tangente de la superficie de la tierra.

580 Cada punto de la tierra tiene orizonte distinto, *HO* es el orizonte de un observador puesto en *A*; si caminara hasta el punto *B* distante 10° del punto *A*, su orizonte será *RI*, y formaría con el precedente un ángulo de 10°.

581 Una vez conocido del lado del norte el polo boreal del mundo, elevado sobre el orizonte, es facil figurarse que hay otro del lado del medio dia, llamado *polo meridional*, *polo austral*, ó *polo antártico* directamente opuesto al primero, y está debaxo del orizonte los mismos grados que el otro está mas arriba. La linea recta que vá desde el un polo al otro se llama el *exe del mundo*, porque parece que el mundo dá la vuelta al rededor de ella en el discurso de un dia.

274. 582 El *meridiano* es un círculo máximo como *HPZEORQH* que nos figuramos pasa por el zenit, el nadir y los polos del mundo. Cada punto de este círculo dista igualmente del orizonte á la derecha y á la izquierda; por manera que todos los astros entre su nacimiento y su ocaso se hallan en el meridiano, una vez encima del orizonte, otra vez debaxo. Su revolucion diurna se podrá dividir en quatro partes iguales; es á saber, desde que nacen hasta llegar al meridiano, desde que pasan por el meridiano hasta po-

ponèrse, desde que se ponen hasta pasar por la parte Fig.
inferior del meridiano, y desde que pasan por la par- 274.
te inferior del meridiano hasta que vuelven á nacer el dia siguiente.

583 El meridiano divide el cielo en dos emisferios, el uno al oriente, el otro al poniente, por cuyo motivo se llaman *emisferio oriental*, y *emisferio occidental.* Llámase meridiano este círculo, porque quando el sol llega á alcanzarle estamos á la mitad del dia. Por él pasan tambien todos los demas astros.

584 El meridiano de París, v. gr. es distinto del meridiano de un pais que está mas al oriente que París, y un observador que camina ácia el oriente ó el occidente muda de meridiano tanto como se acerca al oriente ó al occidente. Como Brest está 7° mas al occidente que París, el meridiano de París dista 7° del de Brest. Un observador que vá en derechura ácia el norte ó al sur no muda de meridiano.

585 Todos los meridianos de los diferentes paises de la tierra se juntan y cruzan en los dos polos del mundo, pues todos van desde un polo á otro. Quando un observador que está en un lugar fixo habla del meridiano, siempre se entiende el meridiano del lugar donde está.

586 El que conoce los dos extremos del exe, concibe facilmente la rueda ó el círculo que está en medio; este círculo es el *equador*, y está á iguales distancias de los dos polos.

587 Representa el círculo *HPZEORQH* la circunferencia del meridiano; *P*, el polo boreal; *R*, el polo austral; *PR*, el exe del mundo; la linea *EQ* representará el diámetro del equador, que pasa á distancias iguales de ambos polos, cuyo plano es perpendicular al exe, del mismo modo que el plano de una rueda es perpendicular á su exe. Nos hemos, pues, de figurar sobre el diámetro *EQ* un círculo perpen-

Fig. pendicular al plano de la figura, cuya mitad esté encima de dicho plano, y la otra mitad debaxo: este círculo será el equador. Por estar el equador á igual distancia de cada polo, se puede decir en general é indistintamente que la esfera con su equador *EQ* dá vueltas al rededor del exe *PR*, ó al rededor de los polos *P*, *R* del equador.

588 El equador divide todos los meridianos en dos partes iguales, una vez que el equador está en medio del intervalo que hay de un polo á otro. Todos los meridianos son perpendiculares al equador; porque si no fuera así, el equador se arrimaría mas al un polo que al otro, cuya conseqüencia desdice de su naturaleza.

589 A los tres círculos principales de que hemos hablado hasta aquí; es á saber, el orizonte, el meridiano, y el equador, se refieren todos los astros que se observan. Por de contado ningun astro es visible hasta que asciende por el orizonte; y quanto mas arriba del orizonte sube un astro, tanto mas tiempo es visible. Es, pues, la altura de un astro sobre el orizonte un punto muy importante; veamos como se determina.

275. 590 Sea *O* un observador cuyo zenit es *Z*, y *HOR* el orizonte; habrá, pues, 90° desde *Z* á *R*, porque *ZR* es el quadrante del círculo, ó de toda la circunferencia; así, una estrella que viésemos en *Z*, tendría 90° de altura; la que estuviese en *A*, á igual distancia del orizonte *R* que del zenit *Z*, tendría 45° de altura, &c.

591 El observador *O* que quiera medir estas alturas, formará un quadrante de círculo *BD* de madera ó metal, dividiéndole en 90 partes; colocará el uno de los lados *BO* verticalmente, por medio de un plomo, y estando en esta disposicion mirará, aplicando la vista en el centro *O*, á qué punto *C* correspon-

ponde el astro en *A*; y el número de grados que Fig. hubiere en la parte *CD* del instrumento, será el mis- 275. mo que habrá en la porcion *AR* de la esfera celeste, y señalará la altura del astro *A* respecto del orizonte.

592 Porque, si el arco *DC* fuese, v. gr. la octava parte de toda una circunferencia, ó la mitad de *BD* en el instrumento, el arco celeste *AR* tambien será la mitad de *ZR*, y por consiguiente cada uno de ellos será de 45°.

593 Pero los Astrónomos colocan el quadrante de un modo mas acomodado para medir las alturas; pónenle en tal situacion, que el uno de los lados *BO* se dirige á la estrella *A*, cuya altura se proponen medir. En el centro *O* cuelga sin tropiezo un plomo *OED*; el arco *EG* del quadrante, comprehendido entre el plomo y el radio *OG*, coge tantos grados como el arco *AR* que mide la altura del astro sobre el orizonte *HR*. Porque, la linea vertical *ZOED* forma con el rayo de la estrella *BOA* un ángulo, cuya medida es el arco *ZA* por un lado, y por el otro el arco *BE* que le es semejante, y de un mismo número de grados; esto es lo que llamamos *distancia al zenit*. Pero el arco *ZA* es el complemento del arco *AR*, como *BE* es complemento de *EG*; por consiguiente el arco *AR* es semejante al arco *EG* (I. 342); luego este último arco determina la altura del astro del mismo modo que el arco *AR*. Para observar la altura de un astro no hay mas que dirigir uno de los lados *BO* del quadrante *BEG* ácia el astro supuesto en *A*, y ver quantos grados intercepta, contando desde el otro radio *OG*, del instrumento, el plomo *ZOED* colgado en el centro *O* del instrumento, esto es, el arco *GE*.

594 La medicion de los ángulos que se executa con un quadrante, ó una porcion qualquiera de círculo,

Fig. lo, es el fundamento de toda la Astronomía. Como su asunto es, segun dexamos dicho, averiguar los movimientos de los cuerpos celestes, ha cumplido esta ciencia en señalando siempre que se ofrezca, la situacion aparente de los astros unos respecto de otros. Para esto basta saber que empezando desde un punto determinado del cielo, un astro ha andado un número determinado de grados, ó una porcion qualquiera de la circunferencia, mas que otro astro.

Si reparamos v. gr. que un astro dista de otro la mitad del cielo, esto es, 180°, de modo que esté respecto de él en una situacion diametralmente opuesta, esta será la mayor de todas las distancias aparentes. Quando observemos otro astro que esté á la mitad de este intervalo, y como en medio de los otros dos, diremos que está á 90° ó á un quadrante de distancia de cada uno: mediremos igualmente 30°, 15°, 5° de distancia aparente entre dos astros. Todas estas distancias se miden con presentar á los objetos que se observan un arco de círculo como *CD*, cuyo centro ocupe nuestra vista, y cuya parte *CD* sea semejante á la parte por medir *AR* de la circunferencia celeste.

276. 595 En el tiempo que toda la esfera gira sobre sus dos polos *P* y *R*, los puntos del equador *EQ* trazan un círculo del mismo diámetro que la esfera; pero los puntos mas inmediatos á los polos, como el punto *A*, trazan círculos menores (I. 648). Tal es el círculo *AB* cuyo centro está en el punto *D* del exe *PR*; parece una elipse, porque se le vé de lado y en perspectiva. Estos círculos menores se llamam *paralelos al equador*, ó solamente *paralelos*. Cada punto del cielo traza un paralelo al equador, tanto menor quanto el punto está mas inmediato al polo.

596 A todos estos paralelos *AB* los divide en dos partes iguales el círculo *HBPAO*; porque, como su cen-

centro *D*, y su polo *P* están en el plano del meridiano, este plano pasa por su centro, y los corta por lo mismo en dos partes iguales (II. 697). Así, un astro que puesto al principio en el punto *A* del meridiano, traza con su movimiento diurno el paralelo *AB*, estará tanto tiempo á la izquierda como á la derecha del meridiano, cuyo círculo dividirá en dos partes iguales el tiempo que dura su revolucion. Fig. 276.

597 Quando todo el paralelo *AB* que anda la estrella estuviere encima del orizonte *HO*, se la verá pasar dos veces al dia por el meridiano, primero en *A*, y doce horas despues en *B*. Su mayor altura sobre el orizonte será en su paso superior por *A*, y su menor altura en su paso inferior por *B*. Pero si el paralelo de la estrella tuviere solo una corta porcion mas elevada que el orizonte, como el paralelo *MNL*, cuya parte *MN* mas alta que el orizonte, es mucho menor que la parte invisible *NL*, no será visible la estrella sino unas pocas horas de las 24 que dura la revolucion.

598 Considerando el movimiento diurno, hemos hallado algunos de los círculos que componen la esfera; es á saber el orizonte, el meridiano, el equador, y tambien los paralelos. Fáltanos dar noticia de los demas círculos, para cuyo fin hemos de considerar el movimiento anuo.

Llámase *movimiento anuo* ó *periódico* el movimiento con el qual parece que el sol se mueve, cuyo movimiento se llama tambien *movimiento propio*. De él pende la variedad de las estaciones, los calores del estío, y los rigores del invierno, como tambien la diferencia que en el discurso del año experimentamos en los dias y noches, que son mas largas en una estacion que en otra.

599 Si por la tarde, despues de puesto el sol, se repara ácia poniente alguna estrella fixa, y se la consi-

Fig. sidera con atencion muchos dias de seguida á una misma hora, se la verá cada dia mas cerca del sol; por manera que al último se desaparecerá, y la borrará la luz y el resplandor del sol, del qual estaba apartada al principio. Se echará de ver al mismo tiempo que el sol se habrá arrimado á la estrella, y no la estrella al sol. Porque, si reparamos que todas las estrellas nacen y se ponen cada dia en unos mismos puntos del orizonte, estando siempre á una misma distancia unas de otras, siendo así que el sol nace y se pone cada dia en diferentes puntos del orizonte, y se halla á distintas distancias de unas mismas estrellas, no podremos menos de conocer que el sol habrá mudado de lugar respecto de la estrella, y se le habrá arrimado. Esta observacion se puede hacer en todos los tiempos del año, pero el que se emplee en ello deberá poner cuidado en no equivocar una estrella con un planeta.

600 Luego, lo primero que manifiesta el movimiento del sol, es que *este astro se vá arrimando cada dia á las estrellas que son mas orientales que él.* Luego el movimiento propio del sol es de poniente á oriente, viene á caminar un grado cada dia, y al cabo de 365 dias se volverá á ver la estrella ácia poniente á la misma hora, en el mismo lugar donde pareció el año antes el mismo dia; esto es, el sol habrá vuelto al mismo punto respecto de la estrella; habrá concluido una revolucion; y esto es lo que propiamente se llama movimiento anuo.

601 Para combinar el movimiento anuo con el movimiento diurno del sol, figurémonos un globo grande por cuyo centro pasa un exe cuyos extremos descansan en dos puntos, y dándole vueltas formarémos juicio del movimiento diurno. Si hubiere una mosca, v. gr. en un punto de su superficie á distancias iguales de ambos polos, tendrá que dar vueltas

con

con el globo, y trazará el equador. Si hubiere otra Fig.
mosca en un punto mas cerca del un polo que del otro, trazará un paralelo cuya circunferencia será menor. Pero en el tiempo que el globo dá vueltas ácia una direccion, la mosca podria tambien caminar sensiblemente en direccion contraria; entonces representaría el movimiento propio del sol, que vá caminando poco á poco ácia el oriente, mientras se le lleva cada dia con todo el cielo ácia el occidente un movimiento comun.

602 Es, pues, este movimiento anuo ó propio del sol de occidente á oriente, contrario al movimiento diurno, con el qual todo el cielo se mueve de oriente á occidente. El sol dá cada dia una vuelta al rededor de nosotros, pero al mismo tiempo anda un grado, con corta diferencia, en direccion contraria, ó de occidente á oriente, y corresponde á diferentes puntos del cielo.

603 Despues de observado con cuidado este movimiento anuo, se ha averiguado que su rastro forma un círculo llamada la *eclíptica*, cuya posicion nos importa determinar.

Por de contado la eclíptica, el camino anuo y aparente del sol, es distinta del equador. La altura del equador respecto de los primeros Caldeos que observaban en Babilonia, era de 54°; y si el sol se hubiera movido con su movimiento anuo en el equador, le hubieran visto siempre á la altura de 54° á medio dia. Pero observaron que en verano el sol subia 24° mas arriba del equador, y en invierno baxaba 24° mas abaxo, por manera que su altura á medio dia era de 78° en estío, y de 30° no mas en invierno; de donde infirieron que la eclíptica era un círculo distinto del equador, y distante de él 24°. Echaron de ver que este círculo cortaba el equador en dos puntos, porque observaban dos veces al año, es á saber, en

la

Fig. la primavera y el otoño, que la altura del sol á medio dia era de 54°, la misma que la del equador; de donde resultaba que aquellos dos dias el sol estaba en el mismo equador, del qual tres meses antes se habia apartado 24° los dias de los dos solsticios.

604 Por consiguiente, *es la eclíptica un círculo de la esfera que corta el equador en dos puntos, del qual se aparta 24° al norte y 24° al sur.* Y como estas dos distancias son iguales, se sigue que la eclíptica es un círculo máximo de la esfera (II.697). Averiguado esto, faltaba determinar en el cielo y entre las estrellas el rastro de la eclíptica, y las estrellas por las quales debia pasar el sol cada dia del año.

605 Con esta mira se reparó desde luego que dos dias del año distantes seis meses uno de otro, el sol tenia 54° de altura meridiana, y por consiguiente la misma altura que el equador. A estos dos dias los llamaron *dias de los equinoccios*, porque como aquellos dias anda el sol el equador, está 12 horas sobre el orizonte, y 12 horas debaxo; y los dias son iguales con las noches.

606 Con averiguar el dia del equinoccio de la primavera qué estrella ó punto del cielo pasaba por el meridiano 12 horas despues del sol á media noche, á la misma altura que él, esto es, á la misma altura que el equador, se supo con certeza el punto opuesto al sol, esto es, el equinoccio del otoño, y el lugar donde habia de estar el sol seis meses despues al pasar por el equador en el punto opuesto.

607 Los puntos de la eclíptica situados entre los dos equinoccios, y en los quales se halla el sol quando está mas distante del equador, se llaman *solsticios*, porque llegado el sol á esta mayor distancia del equador parece que se mantiene inmobil algunos dias.

Está, pues, averiguado quanto se necesita para trazar la eclíptica, pues conocemos los dos puntos equi-

equinocciales donde corta el equador; y sabemos que Fig.
si en otros tiempos se apartaba 24° del equador, no se aparta hoy dia mas que 23° ½ al norte y al sur.

608 Despues de formado un globo artificial y señaladas en él las estrellas cuyas posiciones se han observado, trazando primero el equador, y los polos, se podrá señalar tambien la eclíptica, y las estrellas por entre las quales este círculo ha de pasar.

609 Tambien se señalan en el globo dos círculos perpendiculares al equador, que pasan por los polos del mundo, el uno por los equinoccios, y el otro por los solsticios. Llámanse *coluros*; el primero, *coluro de los equinoccios*; el segundo *coluro de los solsticios*.

610 La distancia ó arco de 23° ½ que en los solsticios hay entre el equador y la eclíptica, se llama *la oblicuidad de la eclíptica*. Para determinar esta oblicuidad fué preciso determinar quanto el sol subia en verano mas que el equador, y quanto baxaba en invierno (603), ó quanto mas alto se hallaba el sol en verano que en invierno; como se hallan entre estas dos alturas 47° de diferencia, la mitad de esta diferencia, es á saber, 23° ½ determinó la mayor distancia entre la eclíptica y el equador. Esta oblicuidad es en estos tiempos de 23° 28′ 20″, y mengua como 1′ en 200 años.

611 Cada uno de los paralelos al equador, que el sol anda al parecer cada dia en virtud de su movimiento diurno, dista del equador tanto como el punto de la eclíptica donde se halla el sol. Quando el sol dista 10° del equador, ó tiene 10° de *declinacion*, anda un paralelo que dista 10° del equador, y pasa por el zenit de todos los paises de la tierra que están á la latitud de 10°. Quando llega á su mayor distancia que es de 23° ½, traza su paralelo mas apartado ó el menor de todos, y se le llama *trópico*. Hay un trópico de cada lado del equador; el uno se llama

Fig. *trópico de cancer*, porque el sol le anda el dia del solsticio de verano, quando entra en un grupo de estrellas llamado el *signo de cancer*; el otro se llama *trópico de capricornio*, porque el sol le anda el dia que entra en un grupo de estrellas llamado el *signo de capricornio*. Por consiguiente los dos trópicos abrazan todo el espacio donde puede hallarse el sol, cuyo espacio coge 47°. Los trópicos tocan la eclíptica, y se confunden con ella en los puntos solsticiales; esta es la causa porque el sol, quando se acerca el tiempo de los solsticios, parece que se mantiene algunos dias en los trópicos, permaneciendo á la misma altura, como si se parára, y de aquí viene el nombre de *solsticio*.

612 Todos los círculos de que acabamos de hacer individual mencion, se vén, segun diximos (554), en la *esfera armilar*, porque cada círculo parece un collar ó sortija, y la voz latina *armilla* significa lo mismo.

277. 613 El orizonte es el círculo *AGB*, mantenido en unos pies clavados en el pie de la esfera.

El meridiano es el círculo *AZB*, perpendicular al orizonte, y por la parte de abaxo está sujeto en una muesca hecha al pie del instrumento, y por los lados en dos muescas hechas en el orizonte al norte y al medio dia. Estos dos círculos son inmóbiles.

614 Los círculos movibles forman una como armazon, que dá vueltas al rededor de un exe *PR*. Hay quatro grandes, es á saber, el equador, la eclíptica, y los dos coluros que sirven para sostener la armazon, recibiendo á los demas círculos en unas muescas hechas á propósito. Hay tambien quatro círculos menores, los dos trópicos *HM*, *DI*, y los dos círculos polares *XV*, *SO*.

Los dos círculos polares distan 23° $\frac{1}{2}$ de los polos del

del mundo, lo mismo que los trópicos distan del equador. Fig. 277.

615 El *zodiaco* es una banda celeste *HI* que tiene 16° de ancho, es á saber, 8° de cada lado de la eclíptica; no se hace memoria de este círculo en la Astronomía, solo sirve para representar el espacio del qual no pasan los planetas, los quales en sus movimientos al rededor del sol se apartan como unos 8° de la eclíptica.

616 Lleva tambien la esfera una muestra *KL* dividida en 24 horas que sirve para resolver sin cálculo alguno varias cuestiones de Astronomía. El circulillo ó muestra está asegurado en el meridiano, estando su centro en el polo de la esfera; por consiguiente el extremo del exe ocupa el centro de la muestra, cuya mano dá vueltas en dándolas la esfera.

Método para hallar la altura del polo por medio de las estrellas circumpolares.

617 La disposicion de los tres círculos máximos de la esfera, el equador, el orizonte y el meridiano, es el fundamento de todas las observaciones, porque á los tres expresados círculos se refieren los astros para determinar su situacion y sus movimientos. Es, pues, de suma importancia conocer su situacion recíproca, como está situado el equador respecto de nuestro orizonte; quanto está elevado el polo del lado del norte; quanto está elevado el equador del lado del medio dia.

618 Una vez que el movimiento diurno se hace sobre el equador, este movimiento nos servirá para determinar el equador, y como dicho movimiento se hace al rededor de los polos, tambien nos los dará á conocer. Si la estrella polar (573) estuviera puntual-

Fig. tualmente en el mismo polo del mundo, bastaría medir su altura (591 y sig.), y quedaría averiguada la altura del polo. Pero como la expresada estrella dista dos grados del polo, conforme consta de observaciones hechas con buenos instrumentos, y sumo cuidado, hemos de apelar á otro recurso.

276. 619 La misma estrella polar nos le suministrará. Si la estrella *A* traza al rededor del polo *P* un círculo *AB*, y dicha estrella dista 2° del polo, el arco *AP* será de dos grados, y tambien lo será el arco *BP*, y el arco total *APB* que expresa lo ancho del paralelo, será de 4°. Por consiguiente, quando la estrella estuviere en el punto *A* del meridiano, y en la parte superior de su paralelo, tendrá respecto del orizonte una altura *AH*, quatro grados mayor que la altura *BH* quando la estrella 12 horas despues se hallare debaxo del polo, y la diferencia de estas dos alturas será de 4°. Supongamos ahora que se haya observado la altura de la estrella en *A*, y su altura en *B*; para hallar la altura del polo *P* se deberá partir por medio la diferencia *AB* de las dos alturas; la mitad de esta diferencia será *PB*, la qual se añadirá á la altura mínima *HB* de la estrella, y la suma *HP* será la altura del polo.

274. 620 La altura del polo y la altura del equador valen juntas 90°, de modo que dada la una de las dos se conoce la otra. Sea *P* el polo; *E*, el equador; *PH*, la altura del polo; *EO*, la del equador; el semicírculo *HZO* es la parte visible del cielo que coge 180°. Si de esta se resta el quadrante de círculo *PZE* (586) distancia del polo al equador, ó 90°, restarán por precision otros 90°; luego los arcos remanentes *HP*, *EO* valen juntos 90°. *Luego la altura del polo* HP *es el complemento de la altura del equador* EO.

Sí-

621 Síguese de aquí que la altura del equador es igual á la distancia del polo al zenit, esto es, á *PZ*. Porque *ZH* es de 90°, pues del zenit al orizonte hay un quadrante de círculo (577); así, *HP* es el complemento de *PZ*. Pero hemos visto poco ha que *HP* es el complemento de *EO*, luego *PZ* = *EO*; quiero decir que la distancia del polo al zenit es igual á la altura del equador. Fig. 274.

622 De lo mismo se deduce que la distancia *ZE* del zenit al equador es igual á la altura del polo *PH*. Porque *ZH* es de 90° igualmente que *PE*; si restamos de cada uno la parte comun *PZ*, los arcos residuos *PH* y *ZE* serán iguales.

Trazar una linea meridiana.

623 La definicion dada (582 y 595) del meridiano y de los paralelos manifiesta que el meridiano divide en dos partes iguales y semejantes todos los arcos diurnos de los paralelos al equador. El sol al asomarse al orizonte sube por grados, llega á medio dia al punto mas alto del cielo, y vuelve á baxar ácia el poniente con la misma velocidad, por los mismos grados y en el mismo tiempo que gastó para subir al meridiano. Divide, pues, el meridiano en dos partes iguales la duracion de la aparicion del sol, y señala al mismo tiempo la altura máxîma del sol.

624 Infiérense de aquí dos modos de averiguar la direccion del meridiano, y saber la hora del medio dia. El primero consiste en determinar el instante que el sol dexa de subir, y las sombras de los cuerpos que alumbra son las mas cortas; entonces la sombra de una estaca ó un estilo plantado verticalmente, ó la de un plomo, señalará la direccion del meridiano, y formará lo que llamamos *la linea*

Fig. *meridiana*, ó la seccion de los planos del orizonte y del meridiano.

Este método es poco exácto, porque no es posible conocer con bastante precision el instante de la altura máxima; al acercarse al medio dia, y quando la altura está para llegar á su máximo, crece con tanta lentitud, que queda poca seguridad en la operacion.

278. 625 Acudiremos por lo mismo á otro método. Este consiste en reparar la sombra del sol naciente, y la del sol poniente, estas dos sombras están á igual distancia del meridiano (582), y el medio de estas dos sombras dará la del medio dia.

Representa el círculo *SMCBDA* la circunferencia del orizonte; *S*, el sol naciente; *C*, el sol poniente; *P*, el pie de un estilo plantado perpendicular al orizonte; *PB*, la sombra del estilo quando el sol nace; *PA*, la sombra del mismo estilo quando el sol se pone. Si dividimos en dos partes iguales en el punto *M* el ángulo *SPC* ó el arco *SMC*, la linea *MPD* será la meridiana, pues naciendo el sol en *S*, y poniéndose en *C*, estará á distancias iguales del meridiano que pasa por *M*.

626 Pero se le hace alguna alteracion á este método, porque necesita su práctica un orizonte sumamente despejado. En lugar de los dos puntos del orizonte se substituyen otros dos puntos que estén ambos á igual altura, el uno antes de medio dia, y el otro despues. Si en vez de señalar la sombra del sol quando se hallaba en los puntos *S* y *C* del orizonte, la señalamos media hora despues de nacer, y media hora antes de ponerse, tendremos otras dos sombras *PF*, *PG* mas inmediatas al meridiano y mas cortas, bien que á distancias iguales del meridiano. Con tomar el medio *H* de las dos sombras, se trazará la linea meridiana *PHD*.

Se

627 Se podrá, pues, trazar desde el centro *P* un Fig. 278.
arco como *FG*, se notará el momento en que la sombra de por la mañana llegáre á *F*, y la de por la tarde á *G* sobre el mismo arco; como estas dos sombras han de estar á igual distancia del meridiano, se dividirá el arco *FG* en dos partes iguales, y se determinará un punto *H*, por donde habrá de pasar la meridiana *PHD* tirada por el pie del estilo.

Para mayor exáctitud, se podrán trazar varios círculos concéntricos, cada uno de los quales dará un punto particular de la meridiana.

628 Finalmente, en lugar del estilo que suponemos plantado en *P*, puede servir un instrumento 279.
portatil y muy acomodado. Es una plancha *P* de unas 3 pulgadas, con un agugero *T* hecho con una punta de alfiler, por el qual se introduce un rayo solar. Está sobre un pie *AB* de 7 ú 8 pulgadas, y el rayo dá en la plancha *BD* del pie, ó en una mesa puesta á nivel. Desde el punto *C* que corresponde perpendicularmente debaxo del agugero, y le señala un plomo *TC*, se trazan muchos círculos concéntricos; en cada círculo se señala el punto luminoso de por la mañana *K*, y el de por la tarde *L*; el medio *H* del intervalo determina la meridiana *CH*.

629 Si se cubre la plancha con un gran pedazo de carton, el punto luminoso será mas perceptible, y esta es una ventaja del instrumento propuesto, el qual dá facilidad para poner á nivel la misma mesa, colgando en *T* un plomo puntiagudo, que deberá corresponder puntualmente al punto *C*, si el instrumento fuere bien hecho, y estuviere la mesa á nivel.

Del Tiempo.

630 Como el movimiento de la tierra al rededor de su exe es uniforme, las revoluciones diurnas

Fig. de los astros se hacen en tiempos iguales, y son por lo mismo muy á propósito para medir el tiempo. Pero como todos los astros giran succesivamente unos despues de otros, y con un movimiento perpetuo, se debia escoger uno cuyas revoluciones, contándolas desde un término fixo, sirviesen para la expresada medida; y por ser el sol respecto de la tierra el mas resplandeciente de todos los astros, á él se le dió esta preferencia. Como el orizonte sensible donde el sol nace y se pone, es un círculo muy irregular, lleno de vapores que obscurecen y desfiguran el sol, y los dias cuyos límites señala son muy desiguales, por estos motivos se ha tomado el meridiano por término de las revoluciones diurnas.

631 Aunque dexamos dicho (600) que en el discurso de 365 dias el sol vuelve á una misma estrella, ó que un año dura 365 dias, no es exâcta esta determinacion. Ya repararon los antiguos Astrónomos, despues de observar muchos años de seguida el regreso del sol al solsticio ó al equinoccio, ó su paso por el equador, que en 60 años de 365 dias cada uno, el sol no volvia al equador puntualmente, y que necesitaba 15 dias mas para hallarse en el mismo círculo. Infirieron de aquí con razon que la revolucion del sol no era de 365 dias cabales, sino de 365 dias y 6 horas, esto es, de 365 y $\frac{1}{4}$, ó de 366 dias cada quatro años, y de $365^d + 15^d$ en 60 años.

632 Si partimos los 360° del círculo *solar*, ó los $1296000''$ que valen, por 365 dias y $\frac{1}{4}$, hallaremos que el sol debería andar $59' \, 8''$ cada dia.

633 Pero despues que los Astrónomos hubieron observado por espacio de un año el lugar verdadero del sol en la eclíptica todos los dias á medio dia, repararon que el sol no se hallaba donde debia en virtud de su *movimiento medio*; quiero decir, que no se hallaba donde correspondia si anduviese $59' \, 8''$

ca-

cada dia, de donde se infería que en unos tiempos del año andaba mas que en otros. Con efecto, tambien enseña hoy dia la observacion que el *movimiento verdadero* de éste astro no es igual á su movimiento medio, pues el dia 1 de Abril el sol se halla donde debería estar el dia 3, ó dos dias mas tarde si hubiera caminado uniformemente en la eclíptica desde el dia primero de Enero. Al contrario, á primeros de Octubre el sol está la misma cantidad menos adelantado de lo que corresponde á su movimiento medio. Fig.

634 Como el movimiento diurno es la medida del tiempo (630), este se mide muy naturalmente con los arcos del equador que pasan por el meridiano, porque en el discurso de 24 horas todo el equador pasa por el meridiano en virtud del movimiento diurno. Si á este movimiento en virtud del qual los 360° de la esfera pasan por el meridiano, y dura 24 horas, le dividimos en 24 partes iguales, cada una será de una hora, y corresponderá á 15°, por ser 15 la 24ma parte de 360. Prosiguiendo esta division se hallará que 1° vale 4′ de tiempo, 1′ de grado vale 4″ de tiempo; en general, con quadruplicar los minutos de grado quedan convertidos en segundos de tiempo del *primer mobil*.

La operacion contraria, es á saber, la que consiste en reducir el tiempo del primer mobil á grados, es tambien muy facil; se darán 15° á una hora, la quarta parte de los minutos de tiempo expresará grados, la quarta parte de los segundos de tiempo valdrá minutos de grado, y la quarta parte de los terceros de tiempo expresará segundos de grado.

635 Es algo mas dificultoso reducir los grados á horas solares medias. Hemos visto (632) como el sol anda en virtud de su movimiento propio 59′ 8″ cada dia respecto de las estrellas fixas; por consi-

Fig. siguiente quando una estrella, que pasó por el meridiano á medio dia con el sol, parece que ha dado la vuelta al cielo, y ha vuelto al meridiano el dia siguiente, el sol no ha llegado todavía, porque en el intervalo de un medio dia á otro ha caminado cerca de un grado ácia el oriente. Dista, pues, de la estrella, y por lo mismo del meridiano poco menos de un grado; y como necesita 4′ de tiempo (634) para andar un grado con el movimiento diurno, pasará por el meridiano 4′ mas tarde que la estrella; ó, lo que es lo propio, la estrella pasará 4′ antes que el sol. Porque como el sol es para nosotros el objeto mas reparable, le tomamos por término de comparacion; su regreso señala nuestras 24 horas; y decimos que las estrellas vuelven al meridiano en 23 horas 56 minutos, siendo así que el sol vuelve en 24 horas.

Los reloxes de péndola, que mas comunmente se llaman *péndolas*, están arreglados por el movimiento medio del sol, señalan las horas solares medias; quiero decir, que estos reloxes han de concordar al fin del año con el sol, así como concordaban al principio del año, y han de señalar cada dia $23^h\ 56'$ en el intervalo del paso de una estrella por el meridiano al paso siguiente. Los mas de los Astrónomos arreglan sus reloxes del mismo modo, á fin de que el relox señale con corta diferencia la hora que es para los usos de la sociedad, y con corta diferencia el tiempo verdadero de las diferentes observaciones que han de hacer. Sin embargo, como las estrellas se mantienen fixas, siendo así que el sol camina, ó parece que camina un grado cada dia, mas ó menos, el regreso de una estrella al meridiano, sería una medida mucho mas fixa y mas igual que el regreso del sol; el regreso de la estrella nos manifiesta el movimiento cabal de la esfera, ó del pri-

primer mobil, y la rotacion completa de la tierra. Fig.

636 Las horas solares son mas largas que las horas del primer mobil, pues el sol gasta 4′ mas que una estrella para volver al meridiano. Hablarémos por ahora de las horas solares medias, esto es, de las que el sol señala, prescindiendo de las desigualdades de su movimiento (633); en otro lugar hablaremos de las horas solares verdaderas que no gozan la misma uniformidad.

Las 24 horas corresponden á 360° 59′ 8″, porque en 24 horas solares medias, no solo la estrella vuelve al meridiano, cuyo regreso completa los 360°, mas el sol mismo que habia caminado 59′ 8″ en una direccion contraria, llega tambien despues, y este regreso completa las 24 horas solares medias. Un relox arreglado por estas 24 horas ya no señala 15° por hora, sino 15° 2′ 8″, que son la 24^{ma} parte de 360° 59′ 8″, y lo propio debe entenderse de las demas partes del tiempo. Esto se llama *convertir las horas solares en grados.*

637 Los reloxes arreglados por las horas del primer mobil, que siguen el movimiento diurno de las estrellas (635), adelantan 3′ 56″ cada dia á medio dia, respecto del movimiento medio del sol, y nunca señalan la hora del sol á excepcion del dia del equinoccio.

638 La aceleracion diurna de las estrellas fixas es la cantidad que una estrella precede cada dia al sol, valuada en tiempo solar medio, en el instante que la estrella pasa por el meridiano. Es la cantidad que tiene que andar entonces el sol para llegar al meridiano, ó el tiempo que necesita para andar los 59′ 8″ que anda cada dia ácia el oriente respecto de la estrella en 24 horas solares medias. Esta aceleracion se determina por esta proporcion, 360° 59′ 8″ 2041 son á 24^h, como 360° 0′ 0″ son á 23^h 56′ 4″ 098, es-

Fig. este es el tiempo que gasta la estrella en andar los 360° ó en volver al meridiano; para las 24 horas faltan 3′ 55″902, esta es la aceleracion diaria de las estrellas.

639 El relox arreglado por las estrellas fixas, ó por el primer mobil, siempre señala $0^h\ 0'\ 0''$ en el instante que el equinoccio pasa por el meridiano, y siempre señala la ascension recta (despues se dirá que cosa es) del *punto culminante*, esto es, del punto de la eclíptica que está en el meridiano, convertida en tiempo á razon de 15° por hora.

640 Los Astrónomos cuentan los dias desde un medio dia para otro; dicen que es una hora de tiempo verdadero quando el sol ha andado la 24^{ma} parte de la revolucion de un medio dia para otro.

De las Longitudes y Latitudes Geográficas.

641 Hay tambien en la tierra un equador y dos polos; y así como el equador celeste determina las estaciones, el terrestre determina el temple, y el grado de calor ó frio que se experimenta en las diferentes regiones.

Repararon desde luego los primeros observadores las estrellas que en el cielo corresponden al equador, ó están á igual distancia de ambos polos celestes. Viajando despues por la tierra notaron los hombres al ir ácia el medio dia, que dichas estrellas se acercaban á la vertical, y pasaban por el meridiano mas cerca del zenit á medida que eran mas meridionales los paises donde se hallaban.

642 Echaron de ver que caminando todavía mas al medio dia habian de llegar á los parages de la tierra donde dichas estrellas pasan cabalmente por el zenit, y los polos están en el orizonte, y que entonces estarían encima del equador terrestre, porque

que el uno corresponde al otro, están en un solo Fig.
y mismo plano, pues el equador celeste determina el terrestre.

643 El equador terrestre ó *linea equinoccial* dá la vuelta á la tierra, pasa por medio del Africa, por los Estados poco conocidos del Macoco y del Monoemugi, atraviesa el mar de las Indias, las Islas de Sumatra y de Borneo, y la vasta extension del mar Pacífico. El equador atraviesa despues la América meridional desde la Provincia de Quito, en el Perú, hasta el desaguadero del rio de las Amazonas. Los paises que están sobre esta linea no tienen latitud alguna. A medida que nos vamos apartando del equador para ir ácia los polos, decimos que caminamos en latitud; á un grado de distancia del equador decimos que estamos á un grado de latitud. Es, pues, la latitud la distancia á que estamos del equador, medida ácia el sur ó ácia el norte; llámase *latitud septentrional* ó *boreal* la distancia al equador respecto de los paises que están del lado del norte; y *latitud meridional* ó *austral* la que se cuenta del otro lado de la linea. La latitud no puede pasar de 90°, porque no hay mas que 90° desde el equador á los polos.

644 La altura del polo (619) es igual á la latitud. Porque la latitud de un lugar qualquiera es lo mismo que la distancia de dicho lugar al equador terrestre, ó la distancia de su zenit al equador celeste, esto es, ZE; pero $ZE = PH$ (622); luego 274.
la latitud es igual á la altura del polo.

645 No basta medir las distancias de norte á sur con el nombre de latitud, es tambien preciso medirlas de occidente á oriente. Las distancias contadas en esta última direccion se llaman *longitudes*, porque los paises conocidos de los antiguos cogían mas de largo de occidente á oriente que no de norte á sur.

Pa-

Fig. 646 Para medir las longitudes se conciben muchos círculos perpendiculares al equador, los quales pasan por los dos polos de la tierra, y son los meridianos terrestres; todos los paises que están sobre un mismo meridiano tienen una misma longitud.

647 El *primer meridiano*, aquel desde el qual se cuentan las longitudes, es arbitrario y de convenio; porque en el cielo no hay ningun término fixo para las longitudes, siendo así que el equador lo es para contar las latitudes.

Ptolomeo puso el primer meridiano en las Islas Canarias, las últimas tierras conocidas de su tiempo del lado del occidente. Los Franceses le han señalado en virtud de una Pragmática de Luis XIII en el extremo de la Isla del Hierro, la mas occidental de las Canarias, cuya Isla está 19° 53′ 45″ al occidente de París. Pero el célebre Geógrafo Frances *Delisle* supuso, para mayor facilidad, y en números redondos, que París está á 20° de longitud, y todos los Geógrafos de su nacion le han seguido en esta determinacion. Así, los Franceses ponen su primer meridiano universal á 20° del meridiano de París del lado del occidente, y prosiguen contando ácia el oriente hasta 360° dando la vuelta á la tierra.

648 Los Astrónomos Franceses que suelen determinar las longitudes comparando las observaciones hechas en París con las que se hacen en otros parages de la tierra, tienen otro modo de contar. Cuentan no por grados sino por tiempo, la diferencia de los meridianos ó la diferencia de longitud entre París y los demas paises; quince grados de longitud componen una hora, cada grado vale 4 minutos de tiempo; y en vez de decir v. gr. que Poitiers está á 18° de longitud, porque esta ciudad

es

es 2° mas occidental que París, dicen que la diferencia de los meridianos es de 8′ occidental. Fig.

649 Las diferencias de los meridianos manifiestan las diferencias de las horas que se cuentan en un mismo tiempo en diferentes paises ó ciudades. Un observador que caminase 15° mas al oriente de lo que está París, pongo por caso hasta Viena de Austria, contaría una hora mas que en París; porque como caminaría ácia el sol que dá la vuelta cada dia de oriente á poniente, le vería una hora antes que los vecinos de París. Si prosiguiera caminando de este modo de 15 en 15° ácia el oriente, ganaría una hora cada vez; y si llegase á dar toda la vuelta á la tierra, tendría adelantadas 24 horas al llegar á París, sería para su cuenta el Lunes quando para los moradores de París no sería sino Domingo.

Un observador que caminase ácia el occidente, se atrasaría la misma cantidad, y al llegar á París, despues de dar la vuelta á la tierra, á su cuenta sería Sábado, quando para la cuenta de los de París sería Domingo.

650 La determinacion de las longitudes es un punto muy importante y dificultoso. Se trata de saber v. gr. quanto el meridiano de París dista del de la Martinica, ó quanto se ha de caminar ácia el occidente para llegar á la Martinica. El método que siguen los Astrónomos para executar esta determinacion consiste en buscar en el cielo un fenómeno ó una señal que se pueda ver en un mismo instante desde París y la Martinica, pongo por caso el instante en que empieza un eclipse de luna. Si son las 12 de la noche quando el eclipse empieza en la Martinica, y se contaron en el mismo instante 4^h 13′ de madrugada en París, es constante que habrá 4^h 13′ de tiempo, ó 63° 15′ de

ar-

Fig. arco entre el meridiano de París y el de la Martinica.

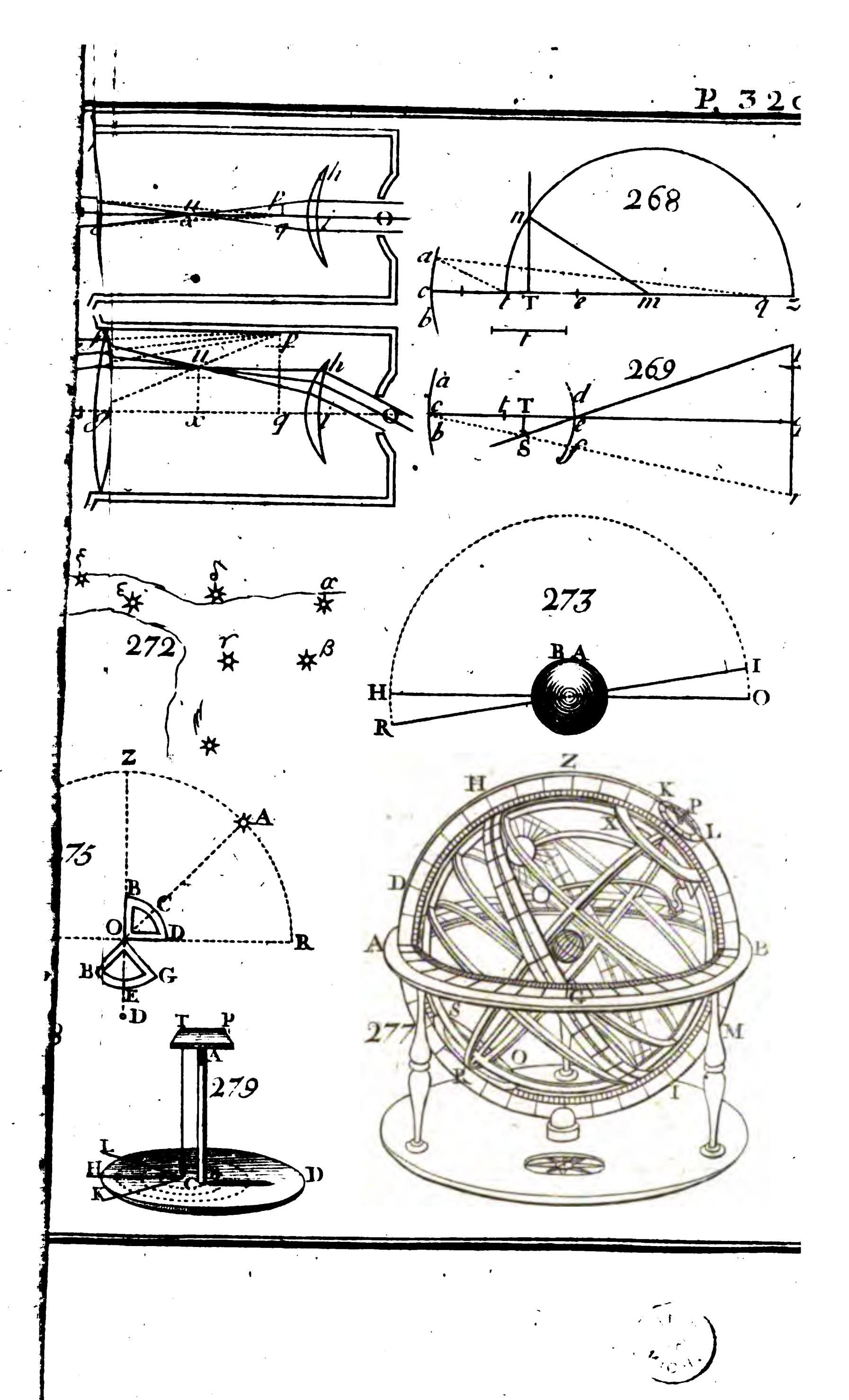
Con efecto, el sol gasta 24 horas en dar la vuelta á la tierra, y una hora en andar 15 grados. Si los de la Martinica tuviesen medio dia una hora mas tarde que los de París, sería señal cierta de estar la Martinica 15° mas al occidente que París. Pero como le tienen 4^h 13′ mas tarde, segun consta de la observacion, está por lo mismo la Martinica 63° $\frac{1}{4}$ mas al occidente que París; porque 4^h 13′ á razon de 15° por hora y de 1° por 4 minutos de tiempo son 63° $\frac{1}{4}$.

De la Esfera recta, oblicua y paralela.

651 Hay tres posiciones distintas de la esfera armilar correspondientes á tres situaciones diferentes de los paises de la tierra; es á saber la esfera recta, la esfera oblicua, y la esfera paralela, segun el equador corte á ángulos rectos el orizonte, le corta oblicuamente, ó es paralelo con él. Las apariencias del movimiento diurno son muy distintas en estas tres posiciones, conforme vamos á declarar. Pero dos causas contribuyen para que el dia sea mas largo de lo que corresponde á la situacion de la esfera; es á saber, la refraccion de la luz, y la luz crepuscular.

652 La refraccion es causa de que los rayos del sol se tuercen (399 y sig.), y llegan á nosotros antes de lo que llegarían por la linea recta. Es causa esta refraccion de que quando el borde superior del sol llega al orizonte, de modo que no hace mas que empezar á dexarse ver, estando todavía debaxo del orizonte todo el disco, la refraccion hace que le veamos todo entero, por manera que entonces su borde ó limbo inferior toca el orizonte, y el efecto de la refraccion es igual al diámetro del sol.

La


268
269
272
273
75
277
279

653 La *luz crepuscular* es aquella luz suave y apacible de la aurora, que vemos crecer poco á poco por la mañana antes que nazca el sol, y vá menguando por la tarde despues de puesto el sol. Proviene este crepúsculo de la dispersion que padecen los rayos del sol en la masa del ayre que los reflecte ácia todas partes. El crepúsculo dura toda la noche en los paises que tienen mas de 48° ½ de latitud; si hubiese habitantes debaxo del polo, tendrían un crepúsculo de tres semanas, de suerte que las tinieblas durarían para ellos seis semanas menos por razon del crepúsculo, sin que el sol pareciese en su orizonte. En lo que vamos á decir prescindiremos de estas dos causas. Fig.

654 La *esfera recta*, esto es, aquella en la qual el equador *EV* es perpendicular al orizonte *HO*, es la de los que habitan debaxo del equador, como los moradores de Quito. Allí los dos polos siempre están en el orizonte; todos los paralelos al equador, como *PA*, están divididos por el orizonte en dos partes iguales; por consiguiente todos los dias son iguales unos con otros; y con las noches todo el año. 280.

655 El sol pasa dos veces al año por el zenit, es á saber los dias 21 de Marzo, y 23 de Septiembre, cuyos dias el sol anda el equador que pasa por el zenit de aquellos pueblos.

656 En la esfera recta está el sol del lado del norte, y la sombra del lado del sur la mitad del año, desde 21 de Marzo hasta 23 de Septiembre, lo contrario sucede desde 23 de Septiembre hasta 21 de Marzo; y los dias del equinoccio no hay sombra ninguna á las doce del dia.

657 Todas las estrellas se ven encima del orizonte en el discurso de 24 horas, porque dando la vuelta están 12 horas encima, 12 horas debaxo; siendo así que en las demas posiciones de la esfera hay estrellas que jamás se vén.

Fig. 658 Finalmente, se ven nacer el sol, y todos los demas astros perpendicularmente al orizonte.

281. 659 La *esfera obliqua* es la de todos los paises
282. de la tierra que no están ni debaxo del equador, ni debaxo de los polos, ora estén en el emisferio boreal, ora estén en el emisferio austral que tiene el polo antártico elevado sobre el orizonte.

En la esfera obliqua está el equador en situacion obliqua respecto del orizonte; el orizonte divide en dos partes desiguales los paralelos al equador; el dia no es igual con la noche sino los dias 21 de Marzo, y 23 de Septiembre, que son los dias de los equinoccios, andando el sol el equador que el orizonte divide en dos partes iguales.

281. 660 En los paises septentrionales, qual es Europa, tenemos los dias mas largos quando el sol está en la parte septentrional del cielo, y traza los paralelos como *AB*, cuya mayor porcion *AD* está mas arriba del orizonte. En los paises meridionales, quales son Africa, y parte de la América meridional, los dias mas largos son quando el sol está en la parte meridional del cielo, porque entonces el sol anda los paralelos, cuya porcion mayor está encima del orizonte.

282. Porque, el exe del mundo *PR* pasa por los centros *K*, *C*, *N* de todos los paralelos; pero la parte meridional *CR* del exe está mas alta que el orizonte en los paises meridionales; luego los paralelos tienen allí sus centros mas elevados que el orizonte; luego los arcos diurnos de dichos paralelos son mayores que los arcos nocturnos; luego los dias son allí mas largos que las noches, quando el sol está en la parte meridional del cielo.

281. 661 Los arcos diurnos ó superiores de los paralelos son tanto mayores, quanto mas próximos están al polo elevado. Así, el paralelo cuyo diámetro es

AB

AB tiene su parte diurna *AD* mucho mayor respec- Fig.
to de su parte nocturna *DB*, que el paralelo *ab*, 281.
cuyas dos porciones son *ad* y *db*. Porque como el exe del mundo *RCP* se vá apartando mas y mas del orizonte *OH*, el centro *K* del paralelo *AB* está mas elevado que el centro *k* del paralelo *ab*.

662 El arco diurno del trópico de cancer es por lo mismo el mayor de todos los arcos diurnos del sol respecto de los paises septentrionales, porque entre todos los paralelos el trópico de cancer es el mas inmediato al polo. Esta es la razon porque el dia mas largo del año es el dia que el sol anda el trópico de cancer, esto es, el dia del solsticio de estío; por la misma razon la noche mas larga de todo el año es la del solsticio de invierno.

663 En la esfera obliqua, del mismo modo que en la esfera recta, el dia es igual con la noche en los equinoccios, porque entonces el sol anda el equador, y porque un orizonte qualquiera divide el equador en dos partes iguales, por la naturaleza de los círculos máximos.

664 En la esfera obliqua boreal el sol sube desde 21 de Diciembre, dia del solsticio de invierno, hasta 21 de Junio, dia del solsticio de estío, porque cada dia se acerca al norte una corta cantidad; crecen los dias y menguan las noches, porque los arcos diurnos de los paralelos ván siendo mayores.

665 Los dias igualmente distantes de un mismo solsticio son iguales; así, los dias 20 de Mayo, y 23 de Julio, el sol se pone en París á las $7^h\ 43'$, porque hallándose aquellos dos dias 20° distante del equador, ó lo que es lo mismo, siendo de 20° la declinacion del sol, traza el mismo paralelo el dia 20 de Mayo al apartarse del equador subiendo ácia el trópico, que el dia 23 de Julio al acercarse al equador despues del solsticio de estío.

Fig. 666 Quando el sol tiene 20° de declinacion austral, los dias 20 de Enero, y 21 de Noviembre, el dia es tan largo como era la noche en el primer caso, y la noche dura lo que duraba el dia quando el sol andaba el paralelo semejante al norte del equador; porque á 20° del equador los paralelos son iguales, é igualmente cortados por el equador, bien que al revés el paralelo del norte respecto del paralelo
281. del sur. Porque si el paralelo *GML* dista tanto del equador *ECQ* ácia el medio dia, como el paralelo *AKB* dista por la parte del norte; quiero decir, si $NC = CK$, la cantidad *GM* será indispensablemente igual á la cantidad *DB*, pues $MN = DK$ por ser iguales los triángulos *CMN*, *CDK*, y por otra parte $GN = KB$, una vez que los dos paralelos están á la misma distancia del equador (I.651); luego las partes remanentes *GM* y *DB* serán iguales; quiero decir, que el arco diurno del uno de los paralelos será igual con el arco nocturno del otro, y la noche de 20 de Mayo será igual al dia de 20 de Enero.

667 Dos paises que están á latitudes iguales, el uno al norte del equador, el otro al sur, tienen estaciones siempre opuestas; la primavera del uno es el otoño del otro; el estío del primero es el invierno del segundo, porque los arcos diurnos del lado del norte son iguales á los arcos nocturnos del lado del medio dia, respecto de unos mismos dias.

Comparemos con efecto una con otra las dos fi-
281. guras; en la una el polo septentrional *P* está mas
282. arriba del orizonte; en la otra, el polo meridional *R* es el que está mas arriba del orizonte. El paralelo *GL* en ambas figuras está al medio dia del equador; pero en la primer figura el medio dia está en la parte de abaxo, y en la segunda está en la de arriba; en la primer figura el arco diurno *GM* es menor que el arco nocturno *ML*; siendo así que en

la

la segunda el arco diurno *GM* es el mayor; el arco Fig.
nocturno *LM* de la primer figura es igual al arco 281.
diurno *GM* de la segunda; quiero decir, que los 282.
paises que están v. gr. á 30° de latitud boreal, tienen el dia igual con la noche de los que están á 30° de latitud meridional, y el uno tiene el invierno quando el otro el verano.

668 Los paises que están debaxo de un mismo paralelo de un mismo lado del equador, tienen los dias iguales, y la misma estacion, haya entre ellos la distancia que hubiere. Porque como tienen la misma altura de polo, y el exe del mundo está situado de un mismo modo respecto del orizonte de ambos, todos los paralelos están cortados de un mismo modo.

669 La *esfera paralela* es aquella que tiene el 283.
orizonte paralelo al equador, cuyo equador se confunde con el orizonte. No hay en la superficie de la tierra mas que dos puntos á los quales pertenezca esta esfera, es á saber, los dos polos; y como estos dos puntos son inhabitados é inhabitables, hablarémos muy poco de la esfera paralela.

En esta esfera el polo celeste *P* está en el zenit, el año se compone de un dia y una noche, que duran seis meses cada uno. Todo el tiempo que el sol permanece en la parte septentrional, el polo boreal está iluminado sin interrupcion; todos los paralelos que traza desde el equador hasta el trópico de cancer *TR*, están mas altos que el orizonte al qual son paralelos; por consiguiente el sol dá cada dia la vuelta al cielo sin mudar de altura, sin apartarse ni arrimarse al orizonte notablemente por lo menos. Quando el sol pasa despues á la parte meridional del equador, ya no se dexa ver sobre el orizonte; los paralelos que traza están todos en el emisferio inferior é invisible, y hay una obscuridad de seis meses. Hemos de exceptuar el crepúsculo que em-

Fig. empieza 52 dias antes que el sol se dexe ver sobre el orizonte, y acaba 53 dias despues que el sol se desapareció del todo.

670 En lo que diximos (641 y 651) de las latitudes terrestres y situaciones de la esfera, se funda la division que los Geógrafos han hecho de la superficie de la tierra en cinco zonas ó bandas circulares, que son la *zona tórrida*, las dos *zonas templadas*, y las dos *zonas glaciales*.

284. 671 La zona tórrida *KMLFK* coge 23° $\frac{1}{2}$ al uno y otro lado del equador; abraza todos los paises de entre los dos trópicos; sus moradores pueden tener el sol á su zenit.

672 Las zonas templadas *ABFK*, *MLTS* cogen 43° contados desde cada trópico, la una está al norte del trópico de cancer, la otra al sur del trópico de capricornio. En estas dos zonas están los paises que nunca tienen el sol á su zenit, ni dexan de verle en invierno. Los paises que están á 66° $\frac{1}{2}$ de latitud boreal, no tienen el equador elevado mas que 23° $\frac{1}{2}$ (620), y por consiguiente quando el sol en el solsticio de invierno está 23° $\frac{1}{2}$ debaxo del equador, no sube mas arriba del orizonte, y no hace mas que asomarse al mismo orizonte en el instante del medio dia.

673 Mas allá de los 66° $\frac{1}{2}$ de latitud, llega tiempo que no se vé el sol; en las inmediaciones del solsticio de invierno, allí empieza la zona glacial, y coge hasta el polo. Sabemos que la *zona glacial* del norte es habitada, pues en ella están Laponia y Siberia, lo demas es un mar inmenso hasta el polo. La zona glacial del sur es totalmente desconocida.

674 Llamamos *círculo polar* un círculo menor *AB* de la esfera terrestre paralelo al equador, que está á los 66° $\frac{1}{2}$ de latitud boreal, cuya circunferencia coge todo el espacio *APB* que hemos llamado zona gla-

glacial. Hay dos círculos polares *AB*, *ST*, y dos Fig. zonas glaciales; la una coge desde el un círculo po- 284. lar hasta el polo septentrional; la otra, desde el otro círculo polar hasta el polo antártico ó meridional.

De los Antípodas.

675 Llamamos *antípodas* dos paises de la tierra que están en los extremos de una linea recta que pasa por el centro de la tierra. Así, Buenos-Ayres es antípoda de Pekin, Capital de China, conforme lo evidencian las latitudes y longitudes observadas de estas dos ciudades.

676 Muchos no conciben como pueden ser habitados dos paises antípodas uno de otro, de modo que sus pies se correspondan; les parece que los moradores de alguno de los dos paises han de estar con la cabeza ácia abaxo y patas arriba. Pero ningun escrúpulo tendrá acerca de esto el que considerare que la gravedad impele todos los cuerpos ácia el centro de la tierra. Así, el cuerpo *A* impelido ácia el centro 285. *C* del globo terrestre, en la direccion *ABC*, ó el cuerpo *E* impelido en una direccion contraria *EDC*, caen y baxan ambos ácia la tierra, porque su inclinacion natural es acercarse al centro *C*. Un hombre puesto en *B* verá que le cae encima la lluvia desde *A* á *B*, y el que vive en sus antípodas *D* verá caer la lluvia sobre la tierra en la direccion *ED*.

677 Se nos preguntará tal vez ¿por que si el cuerpo *A* baxa de *A* á *B*, el otro no ha de baxar de *D* á *E* y *F*? Responderemos que el cuerpo *A* no baxa ácia *B*, sino porque hay una fuerza que le precisa á acercarse al centro de la tierra, siendo así que no hay nada por la parte de *F*, ni fuerza ni causa alguna de movimiento, que pueda obligar el cuerpo *E* á moverse. No tiene mas que una inclinacion natural ácia

Fig. la tierra, y quando vá desde *E* ácia *D*, sigue el mis-
285. mo impulso, y se mueve del mismo modo que el cuerpo *A* quando baxa ácia *B*.

Del Sistema del mundo.

678 Entre varios sistemas que se han inventado hasta el dia de hoy, el mas seguido, el único verdadero es el que renovó en el siglo XV. *Nicolas Copérnico*, Canónigo de Thorn, ciudad de Polonia.

286. 679 En este sistema el sol *S* ocupa el centro del sistema; al rededor del sol se mueven de occidente á oriente o en la direccion *ABCD*, Mercurio ☿, Venus ♀, la Tierra ♁, Marte ♂, Júpiter ♃, Saturno ♄.

680 Mercurio que está mas inmediato al sol, concluye su revolucion en 3 meses; venus, cuya órbita es algo mayor, gasta 8 meses con corta diferencia en andar la suya. Mas allá de venus está la tierra que dá la vuelta en el discurso de un año, manteniéndose su exe constantemente paralelo á sí mismo. Marte gasta 2 años; pero júpiter que está mucho mas lejos, tarda 12 años en andar la suya. Finalmente, saturno es de todos los planetas el que mas tiempo pone en andar su órbita al rededor del sol. La órbita de este planeta abraza, segun se vé, las órbitas de todos los demas, y se ha observado que su revolucion periódica dura 30 años.

681 La tierra, ademas del movimiento anuo, ó de traslacion al rededor del sol, tiene un movimiento de rotacion, llamado *movimiento diurno*, porque en virtud de este movimiento dá en el discurso de 24 horas ó de un dia una vuelta al rededor de su exe.

682 Todos estos planetas son los planetas primarios, entre los quales hay tres, es á saber, la tier-

tierra, júpiter y saturno que ván acompañados de sus satélites en el discurso de sus movimientos al rededor del sol. Los *satélites* ó lunas dán su vuelta al rededor de su planeta principal. La tierra no tiene mas que una luna, la qual dá la vuelta cada mes al rededor de la tierra. Fig.

A júpiter le siguen quatro satélites que giran al rededor de él en tiempos diferentes, concluyendo sus revoluciones en tanto menos tiempo, quanto mas próximos están al planeta principal. El primer satélite, que dista del centro de júpiter tres veces el diámetro de este planeta, ó mas puntualmente $2\frac{5}{6}$, dá la vuelta en un dia, y 18 horas; el segundo, que dista $4\frac{1}{2}$ diámetros, concluye su revolucion en tres dias, y 13 horas; el tercero, que dista de júpiter $7\frac{1}{2}$ diámetros de este planeta, acaba su revolucion en siete dias, y 3 horas; el quarto finalmente gasta 16 dias y 18 horas en dar la vuelta, distando como unos $12\frac{2}{3}$ diámetros de júpiter del mismo planeta.

Saturno tiene cinco satélites. El primero acaba su revolucion al rededor del planeta principal en $1\frac{7}{8}$ de dia; siendo de $4\frac{3}{4}$ semidiámetros de saturno su distancia al centro de este planeta; el segundo satélite la concluye en 2 dias 17 horas, y dista del centro de su revolucion $5\frac{2}{5}$ semidiámetros de saturno; el tercero, en 4 dias 13 horas á la distancia de 8 semidiámetros; el quarto en 16 dias, á la distancia de 18 semidiámetros; finalmente el quinto y último satélite que dista del centro 54 semidiámetros, concluye su revolucion en $79\frac{1}{2}$ dias.

683 Ahora probaremos que este sistema es el verdadero. Pero para que no pierdan de su fuerza algunas de nuestras pruebas, hemos de prevenir, que como anduvo valido muchos siglos el sistema llamado de *Ptolomeo*, que supone la tierra sin movimiento alguno en el centro de los movimientos ce-

Fig. celestes, cuya opinion es, segun se vé, diametralmente opuesta á la de Copérnico, el empeño de los Copernicanos se ha dirigido en gran parte á probar que es un absurdo repugnante con las observaciones astronómicas el sistema que coloca la tierra inmobil en el centro de los movimientos planetarios.

684 El movimiento diurno de rotacion que Copérnico dá á la tierra se prueba de varios modos.

1.º Se sigue de la analogía que debe haber entre este planeta y los demas; porque consta de repetidas observaciones que todos los planetas y el mismo sol dán la vuelta al rededor de su exe; parece, pues, natural le suceda otro tanto á la tierra.

685 2.º Supuesto el movimiento diurno de la tierra, se explica con suma facilidad, sin espantar la fantasía, y de un modo que satisface, el movimiento diurno del sol, de las estrellas y de toda la esfera celeste. Porque si paramos la consideracion en la inmensidad de la bóveda celeste, llena de una infinidad de estrellas que todas están á distancias inmensas de nosotros, y de planetas que todos tienen sus movimientos propios; si comparamos la pequeñez de la tierra con todas estas moles, no es posible alcance la imaginacion como se pueden mover con un movimiento comun, regular y constante en el discurso de 24 horas al rededor de un átomo como la tierra. No se alcanza que correspondencia puede haber entre todos estos cuerpos para que haya tanta uniformidad en su movimiento diurno, quando no se repara ninguna entre sus demas movimientos.

686 3.º * Sea la que fuere la causa de la pesantez, por razon de que impele los graves ácia el cen-

* Fúndase este argumento, que es de mucho peso, en una proposicion de Dinámica, que demostraremos en los *Principios de Astronomía Física*.

centro de la tierra, se la suele llamar *fuerza centrípeta*. Es evidente que si en alguna parte de la superficie de la tierra es menor que en otras la graverdad de los cuerpos, será menor su fuerza centrípeta, y será por lo mismo mayor su fuerza centrífuga, ó la fuerza que los apartare del centro del globo. Consta por experiencia que los cuerpos pesan menos debaxo del equador que en los paises mas inmediatos á los polos. Luego la fuerza centrífuga es mayor en el equador. Este aumento de la fuerza centrífuga solo puede provenir del movimiento de rotacion de la tierra, y no hay otro modo de explicarle. Porque supongamos que represente *AEBD* el 287.
globo de la tierra, y *AB* su exe. En el supuesto de que la tierra dé vueltas al rededor de su exe; como por causa de la union de las partes del globo, todos los puntos de su circunferencia dán la vuelta en un mismo tiempo, el punto *D* trazará un círculo cuyo radio es *DC*, en el mismo tiempo que el punto *F* trazará un círculo cuyo radio es *FG*. Luego la fuerza centrífuga en *D* será mayor que en *F*, y por lo mismo quedará destruida en *D* mayor parte de la pesantez de los cuerpos, y de su fuerza centrípeta. Luego si la pesantez mengua yendo del equador á los polos, es indispensable que la tierra gire al rededor de su exe.

687 Por lo que mira al movimiento anuo, se prueba con igual facilidad, despues de sentar una proposicion muy importante para el caso.

Supongamos un cuerpo *A* que se mueve al rededor del centro *S*, y que en un punto *O* fuera del 288.
círculo *AaBb* esté un observador explorando su movimiento. Es constante que quando el mobil llegare al punto *a*, la medida de su movimiento será el arco *Aa*, ó el seno *a.a'* del mismo arco (558); los arcos que miden el camino que anda el expresado cuerpo,

ó

Fig. 6 la distancia que se aparta del punto *A* no pasa de

288. 90°. Porque en pasando el mobil del punto *B* donde remata el arco *AB* de 90° ó el primer quadrante de su revolucion, y llegando pongo por caso á *b*, le parecerá al observador que ha vuelto al punto *a*. Ya se vé como se ha de discurrir acerca de los demas puntos del círculo donde se halláre succesivamente el mobil. Luego quando el observador estuviere fuera del círculo que traza el mobil, la mayor distancia aparente á que este llegáre del principio de su movimiento, no pasará de 90°.

289. Pero si suponemos el observador en *O*, moviéndose el cuerpo en el círculo *ABD*, los arcos andados irán creciendo, de modo que la mayor distancia á que el mobil llegará del punto de donde salió será de 180°. Porque el arco *AD* que mide el camino del cuerpo *A* llegado á *D* es mayor que el arco *AB*, que mide su carrera quando está en *B*, el arco *ABDC* es mayor que *ABD*, é igual á 180°. Este arco mide la mayor distancia á que el mobil puede llegar del punto *A*; porque en pasando del punto C ya se vuelve á arrimar al principio de su movimiento, pues el arco que hay desde *A* á *E* es menor que el arco *ABC*.

288. y 289. 688 Si fuese *A* un planeta que se mueve al rededor del sol puesto en *S*, estando el observador ó la tierra en *O*, inferiremos de lo probado últimamente. 1.° que quando la tierra está fuera de la órbita del planeta, la mayor distancia aparente de este al sol no pasará de 90°. 2.° que quando la tierra estuviere dentro de la órbita del planeta, la mayor distancia aparente de este al sol, llegará hasta 180°.

689 Luego siempre que al observar los movimientos planetarios se verifique que algun planeta se aparta del sol 180° ó 90° no mas en su mayor distancia aparente, podremos inferir que en el primer ca-

caso la órbita del planeta abraza la tierra, y que en Fig.
el segundo esta se halla fuera de la órbita del planeta.

690 Quando la tierra está en *O*, el sol en *S*, y 288.
el planeta en *C* ó *A*, se dice que el planeta está en *conjuncion* con el sol; estando en *A*, la conjuncion es *superior*; estando en *C*, es *inferior*. Quando el sol 289.
está en *S*, la tierra en *O*, el planeta está en conjuncion con el sol así que llega al punto *A*, y en oposicion así que llega al punto *C*, esto es, luego que se halla en una misma linea con el sol, estando la tierra entre los dos.

691 Todo esto presupuesto, es constante que esté donde estuviere el sol, le abraza la órbita de venus. Porque venus se vé ya detras del sol quando al tiempo de su conjuncion superior le vemos perfectamente luminoso ó redondo. Como los planetas no lucen sino porque los alumbra el sol (y en esto convienen los Astrónomos de ambos partidos) venus nos parece lleno quando la superficie ó mitad de este planeta que se nos presenta á la vista es cabalmente la que está de cara al sol, y por lo mismo es preciso que venus esté respecto de nosotros mas allá del sol.

Sea v. gr. *S* el sol; *T* la tierra; *F* ó *V* ve- 290.
nus; es constante que en esta situacion venus parecerá perfectamente redondo á los habitantes de la superficie de la tierra, porque andará la parte de su órbita que está mas allá del sol. Al contrario, quando se desapareciere del todo, ó no le viéremos mas que como una media luna, no podrá menos de hallarse entre la tierra y el sol, porque no está de cara ácia nosotros su emisferio alumbrado, estará entonces venus en el punto *G* de su órbita, ó en el punto *H*, si viéremos una corta parte de su disco alumbrado. Por consiguiente, quando venus es-

Fig. está entre la tierra y el sol pasará y ha pasado alguna vez por el disco mismo del sol. Finalmente, este planeta no se aparta del sol sino una cantidad limitada, de la qual no pasa. Nunca se le ha visto mas de 48° lejos del sol, cuya cantidad no llega ni con mucho á 90°, y por consiguiente nunca puede estar 180° lejos del sol, conforme debería suceder (688) si su órbita abrazase la órbita terrestre.

692 Lo mismo se puede decir de mercurio, que casi siempre está sumergido en los rayos solares, y debe andar una órbita menor que la de venus, pues se aparta menos del sol. Si hay alguna diferencia, solo consiste en que la órbita de venus abraza la de mercurio, pero el sol se mantiene constantemente en el centro de las dos órbitas. Tambien es prueba de estar mercurio mas próximo que venus al sol, el ser la luz de mercurio mas viva y mas resplandeciente que la de venus y los demas planetas.

693 Marte se vé en algunas ocasiones en oposicion ó 180° distante del sol, de donde se sigue (688) que la órbita de marte no solo abraza la órbita de la tierra, mas tambien al sol que por lo mismo ocupará el centro de su órbita. Porque si no fuera así, sería preciso que acercándose marte al tiempo de su conjuncion con el sol, le viésemos en forma de media luna; esto repugna con las observaciones, pues por ellas consta que marte es entonces extremadamente pequeño, y redondo del todo. Pero quando el mismo planeta está 90° distante del sol, su redondez padece alguna alteracion, y es el único tiempo en que se le puede ver con esta apariencia.

291. 694 Sea S el sol; T la tierra; $MNPR$ la órbita de marte. Quando marte estuviere en P ó M, se verá desde la tierra su disco enteramente redondo, porque en ambas situaciones está de cara ácia nosotros su emisferio alumbrado. Pero ya no está vuelto del

del todo ácia nosotros quando marte está en *N* ó *R*, Fig.
províniendo de aquí la alteracion que se repara en 291.
su disco aparente, porque no es posible veamos entonces todo entero su emisferio luminoso. Finalmente, quando marte está en *M* ó en oposicion con el sol, su disco aparente es siete veces mayor que ácia su conjuncion; y por consiguiente (497) está siete veces mas cerca de nosotros que en la conjuncion, estando en su conjuncion á la mayor distancia posible (690) de nosotros. Parece, pues, que el sol y no la tierra ocupa el centro de la órbita de marte, y que está la tierra muy lejos de dicho centro.

695 Lo que dexamos dicho de marte se verifica igualmente respecto de júpiter y saturno, sin mas diferencia que la que se nota en los diámetros de estos planetas, y por consiguiente en sus distancias á la tierra en el discurso de un año. Porque la desigualdad de los diámetros ó de las distancias es mucho menos notable en júpiter que en marte, y en saturno lo es todavía menos que en júpiter.

696 Tambien probarémos geométricamente que no ocupa la tierra el centro de los movimientos planetarios.

Si un cuerpo se mueve siguiendo la direccion de una 292.
recta AZ *dada de posicion, y es impelido al mismo tiempo de una fuerza centrípeta dirigida al punto inmobil* S, *colocado fuera de la expresada recta; la línea que el cuerpo trazará será curva y cóncava ácia* S, *y estará en un plano inmobil que pasa por la recta* AZ, *y el punto* S. *Las areas comprehendidas entre qualesquiera porciones de dicha curva, y las rectas tiradas al centro* S, *tendrán unas con otras la misma razon que los tiempos que gastare el cuerpo en andar dichas porciones.*

Figurémonos el tiempo dividido en partes iguales, y que en la primera de ellas el cuerpo ande á impul-

Fig. pulsos de la fuerza que le hace andar la recta *AZ*,
292. la parte *AB* de dicha recta. Es evidente que en la segunda parte del tiempo igual con la primera andaría en la recta la parte $Bc = AB$ (10), si nada se lo estorbara. Pero supongamos que llegado el cuerpo á *B*, la fuerza centrípeta le dé tal impulso que con él anduviese en la segnnda parte del tiempo la recta *BG*. Si por el punto *c* tiramos la récta *cC* paralela á *BG*, y por el punto *G* la *GC* paralela á *Bc*, el cuerpo en la segunda parte del tiempo llegará á *C* andando (22) la recta *BC*, que está en el plano del paralelógramo *BGCc*, cuyos lados *BG* y *Bc* están en el plano del triángulo *ASB*, que pasa por el centro *S* de las fuerzas, y por la recta inmobil *AZ*. Los triángulos *SCB*, *ScB* son iguales, pues tienen una misma base *BS*, y están entre las paralelas *SB*, *Cc*. Pero *ScB*, *SBA* [illegible] iguales, porque sus bases son iguales, y tienen [illegible] misma altura; luego *SBA* y *SCB* son iguales. [illegible] mismo modo probaríamos que si en la tercera parte del tiempo el mobil anduviese una récta qualquiera *CD*, el triángulo *SCD* será igual con el triángulo *SBC*, y que la recta *CD* está en un mismo plano con las rectas *SB*, *BC*, esto es, en el mismo plano que pasa por la recta *AB* y el punto *S*. Y prosiguiendo á este tenor, mientras duráre el movimiento, en partes iguales del tiempo crecerá igualmente la area formada por radios tirados al centro inmobil de las fuerzas. De donde resulta que las sumas de las areas son unas con otras como los tiempos gastados en trazarlas. La linea que el cuerpo traza estará en un plano inmobil, una vez que pasa por la recta inmobil *AB*, y el centro inmobil *S*. Será tambien cóncava ácia *S*, porque qualquiera porcion suya como *BC*, se aparta de la *AB* inclinándose ácia el centro. Si suponemos que crezca al infinito el número de los triángulos
SAB,

SAB, *SBC* &c. menguando al infinito su latitud, sus bases *AB*, *BC* &c. formarán una curva cóncava ácia un mismo punto que estará en el mismo plano con ella, y la fuerza centrípeta que obraba antes como por intervalos en tiempos iguales, cuya fuerza aparta al cuerpo de la tangente de la misma curva, obrará ahora sin discontinuar ([illegible]) y las areas *SABCS*, *SABCDES*, serán com[illegible] proporcionales á los tiempos en que se trazan. Fig. 292.

697 *Si un cuerpo se mue*[illegible] *una curva* ABCD 293.
trazada en un plano, cóncava ácia un mismo punto, y se ti[illegible] *radio al punto inmobil* S, *que está en el* [illegible]*a del lado de su concavidad,* [illegible]*les á los tiempos, y es animado* [illegible]*peta dirigida á dicho punto* S.

Figuré[illegible]a que el mobil anda dividida [illegible]*D* &c. tales que cada una de [illegible] la linea recta, y las trace el [illegible]rtes ig[illegible]e tiempo. Figurémonos tambien [illegible] la fuerza centrípeta obra por intervalos no mas en los [illegible] *B*, *C*, *D* &c. como antes (696). Prolóngue[illegible]a *c*, de modo que sea $Bc = AB$, y *BC* hasta [illegible] *BC*, y así de las demas. El triángulo [illegible] será igual al triángulo *SBC*, una vez que por la hypótesi las areas son proporcionales á los tiempos, y *SAB* será igual á *SBc*, por ser $AB = Bc$. Luego será $SBC = SBc$, y por lo mismo *Cc* será paralela á *SB*, como se puede inferir de lo dicho (I.545). Pero el cuerpo que en la primera parte del tiempo anda *AB*, andaría á impulsos de la sola fuerza comunicada el espacio *Bc*; y como en esta segunda parte del tiempo anda con efecto *BC*, síguese que la fuerza que obra en el punto *B*, cuya fuerza junta con la fuerza impresa le hace andar al cuerpo la linea *BC*, tiene su direccion en una recta paralela á *Cc*, esto es, en la recta *BS*.

Fig. 293. Del mismo modo la fuerza que obra en el punto *C*, cuya fuerza unida con la fuerza impresa, en virtud de la qual el cuerpo andaría la *Cd* en la tercera parte del tiempo; puede moverle en la recta *CD*, tiene su direccion en una recta paralela á *dD*, esto es, en la recta *CS*. Y como las rectas *BS*, *CS* se dirigen al punto *S*, la fuerza centrípeta que aparta al mobil de las tangentes de la curva, obra en direcciones que ván al centro *S*.

698 *Las fuerzas que desvian los planetas primarios de la direccion rectilinea, y los mantienen en sus órbitas, no se dirigen ácia la tierra, sino ácia el sol.*

Todo cuerpo que se mueve en una linea curva es apartado por el impulso de alguna fuerza de la direccion rectilinea que seguiría naturalmente. Los planetas se mueven en lineas curvas, pues sus órbitas son cerradas. Pero dicha fuerza en los planetas no se dirige ácia la tierra, porque las órbitas de mercurio y venus (691 y 692) no abrazan la tierra, y por lo mismo no son cóncavas ácia la tierra. Luego las fuerzas (697) que los mantienen en sus órbitas no se dirigen ácia la tierra. Por lo que mira á marte, júpiter y saturno, se observan ya retrogrados, ya directos, ya estacionarios respecto de la tierra; el tiempo en que estos movimientos se hacen, siempre corre uniformemente, y por lo mismo las areas trazadas por un radio qualquiera tirado desde uno de dichos planetas á la tierra no son proporcionales á los tiempos en que son trazados. Luego por lo probado (697) la fuerza que mueve los planetas no se dirige ácia la tierra. Pero hemos visto (691 y 692) que las órbitas de mercurio y venus abrazan al sol, y lo mismo consta de marte, júpiter y saturno (693 y sig.), y todos estos planetas comparados con el sol siempre ván caminando ácia adelante: luego &c.

699 De todo lo dicho hasta aquí resulta que la tier-

tierra está entre la órbita de venus y la de marte, y Fig. que por lo mismo ha de tener una órbita parecida á la de dichos planetas, y dar vueltas como ellos al rededor del sol. Tiene esta conseqüencia apoyo en el tiempo mismo que gasta la tierra en concluir su revolucion, que viene á ser un medio entre el que gasta venus, y el que marte necesita. Venus tarda como unos ocho meses, la tierra un año, y marte dos en andar su órbita.

700. Si se comparan ahora los tiempos que todos los planetas gastan en sus revoluciones, con sus distancias medias al sol, se reparará una conformidad maravillosa. Porque quanto mas próximo está un planeta al sol, tanto mas rápido parece su movimiento, concluyendo su revolucion en mucho menos tiempo que los demas. Se observa en los movimientos planetarios una ley invariable, llamada *ley de Keplero*; que consiste en que los quadrados de los tiempos periódicos siempre son proporcionales á los cubos de las distancias al sol, cuya ley se verifica en los planetas secundarios igualmente que en los primarios. V. gr. el primer satélite de júpiter dista del centro de este planeta $2\frac{5}{6}$ diámetros (682), y el tiempo de su revolucion periódica es de 42 horas. En conociendo el tiempo que dura la revolucion de otro satélite, pongo por caso del quarto, que es de 402 horas; si decimos, como 1764, quadrado de 42, es á 161604, quadrado de 402; así $\frac{4913}{216}$, cubo de $2\frac{5}{6}$; es á un quarto término que será $\frac{450090}{216}$, cuya raiz cúbica $= \frac{76}{6} = 12\frac{2}{3}$, será la distancia del quarto satélite al centro de júpiter, la misma cabalmente que dán las observaciones (682).

Veamos, pues, si se compadece esta ley con el supuesto de que el sol gire al rededor de la tierra. Ya que la luna es el satélite de la tierra, sería preciso para aplicar al sol esta ley general, en el su-

Fig. puesto expresado, suponer esta inmóbil en el centro de la órbita solar. Pero como la luna gasta 27 dias en dar una vuelta, y el sol 365 dias; y la luna dista de nosotros como unos 60 semidiámetros terrestres, tendríamos que hacer esta proporcion; como el quadrado de 27, esto es, 729 es á 133225, quadrado de 365; así 216000, cubo de 60, es á un quarto término que sería 39474074, cuya raiz cúbica 340 expresaría la distancia del sol á la tierra en semidiámetros terrestres. Sin embargo consta, y mas adelante se probará, que la distancia del sol á la tierra es por lo menos treinta veces mayor. Inferímos, pues, que es absurdo el supuesto de moverse el sol al rededor de la tierra, una vez que no concuerda con la ley de Keplero admitida de todos los Astrónomos por fundarse en observaciones incontrastables.

294. 701 Sea *S* el sol; *ABCD* la órbita de la tierra en la qual supondrémos que este planeta se mueve de occidente á oriente, esto es, desde *A* en la direccion *BCD*. Si suponemos el observador puesto en el centro *S* del sol, quando la tierra estuviere en *A*, le parecerá que corresponde al punto *A'* del cielo; quando la tierra estuviere en *B*, le parecerá que corresponde al punto *B'* del cielo. Prosiguiendo la tierra su rumbo hasta *C*, le parecerá al observador que corresponde al punto *C'* de la esfera; finalmente, quando estuviere en *D*, creerá que está en el punto *D'* del cielo estrellado.

Si en vez de suponer al observador en el sol, le colocamos en la tierra; quando la tierra estuviere en el punto *C* de su órbita le parecerá que el sol se mueve en el cielo estrellado del mismo modo, y ácia la misma direccion que vía moverse la tierra quando le supusimos en el sol. Por consiguiente, estando la tierra en el punto *C* de su órbita, el observador verá el sol en el punto *A'* de la esfera de las estrellas

Si

Si prosigue observando el sol, le parecerá que cami- Fig.
na hasta *B'*, siendo así que será la tierra la que habrá 294.
llegado en realidad á *D*. Así, el observador atribuirá un movimiento verdadero al sol, porque le habrá parecido que pasó succesivamente por *A'*, *B'*, &c. Asimismo, caminando la tierra desde *D* á *A*, le parecerá que el sol anda en el mismo intervalo de tiempo la porcion *B' C'*; y finalmente quando anduviere el otro semicírculo *ABC*, le parecerá que el sol habrá andado la porcion *C' D' A'*.

702 Es constante que en los demas planetas se observarían tambien movimientos aparentes del sol mayores ó menores, conforme giran mas ó menos aprisa al rededor de este cuerpo luminoso. Por manera que si viviéramos en dichos planetas, le veríamos andar al sol el mismo círculo cabalmente en la esfera de las estrellas fixas, y gastar en su revolucion el mismo tiempo que se repararía respecto de cada planeta, si estuviese el observador en el sol.

Supongo v. gr. que estemos en júpiter; veremos desde allí dar la vuelta al sol al rededor de júpiter en un tiempo muy largo, y en una órbita que discrepará poco de la eclíptica; pero tambien veríamos el movimiento del sol mas lento de lo que nos parece desde la tierra, porque el sol pasando succesivamente por diferentes estrellas no volvería al mismo sitio, no concluiría su revolucion sino al cabo de 12 años (680). Por la misma razon desde saturno se le vería andar al sol una órbita mucho mayor, y en mucho mas tiempo, porque este planeta gasta cerca de 30 años en su revolucion periódica (680).

Pero como no es posible que el sol tenga á un tiempo todos estos movimientos tan diferentes; que se mueva muy despacio y muy aprisa en un mismo tiempo, y no hay por otra parte ninguna razon para que uno de estos movimientos aparentes visto desde

Fig. un planeta, desde la tierra v. gr. sea el movimiento del sol, y no el que se observaría desde júpiter ó saturno, síguese que todos estos movimientos aparentes del sol no son suyos, que ninguno tiene en realidad, y que por fin no son mas que apariencias originadas de los movimientos de los planetas.

Satisfácense los principales argumentos con que en otros tiempos se impugnó el sistema copérnicano.

703 I. Si la tierra se moviera al rededor de su exe, un cuerpo que cae desde lo alto de una torre no caería al pie de la torre; porque mientras la piedra cae, la torre caminando ácia el oriente se dexaría atras el cuerpo. Pero consta por experiencia que el cuerpo siempre cae al pie de la torre; luego &c.

Resp. Para desvanecer este argumento conviene considerar que es imposible que todos los cuerpos terrestres, y la atmosfera de la tierra, que tantos siglos ha forman un todo con la tierra, y dan vueltas con ella, no hayan adquirido un movimiento comun, una direccion comun. La tierra gira con todo lo que es suyo, y todo pasa en la tierra mobil del mismo modo que si no se moviera. Consta que si desde lo alto del palo de un navío que navega se dexa caer una piedra, esta cae directamente al pie del palo, del mismo modo que quando está el navío en reposo. El movimiento del navío se comunica de antemano al palo, á la piedra, y á todo lo que lleva; por manera que todo pasa como si la embarcacion no se moviera. Solo el choque con algun obstáculo puede hacer que perciban el movimiento los que están en la embarcacion. Pero como la tierra no tropieza con obstáculo alguno, nada hay ni en la naturaleza, ni sobre la tierra que pueda con su resistencia, su movimiento ó impulso hacer per-

cep-

ceptible para nosotros el movimiento de la tierra. Fig.
Este movimiento es comun á todos los cuerpos terrestres; aunque se levanten en el ayre, se les ha comunicado de antemano la impresion del movimiento de la tierra, su direccion y velocidad, y aun quando están muy arriba en la atmosfera, prosiguen moviéndose como la tierra. Una bala de artillería arrojada perpendicularmente ácia arriba con suma precision, caería puntualmente en la boca del cañon, bien que en el tiempo que la bala estuviese en el ayre, el cañon hubiese andado algunas leguas ácia el oriente. La razon es muy patente; al tiempo de subir la bala no pierde parte alguna de la velocidad que le comunicó el movimiento de la tierra; estas dos impresiones no son contrarias, pues puede andar una legua ácia arriba mientras anda una legua ácia el oriente; pero quando cayere á impulsos de su gravedad natural, dará con el cañon que siempre se mantuvo en la linea que vá desde el centro de la tierra á la bala.

Para que la bala se quedase en el ayre en una misma linea perpendicular al punto de donde salió sin dar vuelta con la tierra, sería preciso que hubiese en el ayre alguna causa que destruyese el impulso general que le dió á la bala el movimiento de la tierra. Pero no conocemos causa alguna capaz de obrar este efecto; debe, pues, la bala proseguir girando al rededor del centro de la tierra, aun quando le aparta de él el impulso de la pólvora. Es ley constante del movimiento (5) de los cuerpos, y la mas general de todas, que un cuerpo que empieza moviéndose en una direccion qualquiera, prosigue siguiéndola con movimiento uniforme, con tal que ninguna causa le retarde, acelere ó aniquile. No es, pues, de extrañar que los páxaros, las nubes, las balas sigan el movimiento de la tierra aun quando se apartan de ella.

Fig. 704 II. Rèpugna que la tierra se trastorne cada dia, y no es posible figurarnos que al cabo de doce horas estemos cabeza abaxo ó patas arriba.

Resp. Hemos demostrado (675) que hay antípodas, cuyos pies están vueltos ácia los nuestros; estarémos, pues, dentro de 12 horas del mismo modo que nuestros antípodas están actualmente; no es mas dificultoso de entender uno que otro.

295. 705 III. Si desde lo alto de una torre *AB* dexamos caer un cuerpo qualquiera, este andará en quatro tiempos iguales los espacios *AC*, *CD*, *DE*, *EB*, los quales estarán unos con otros como los números 1, 3, 5, 7, 9, segun se infiere de lo dicho (48); si la tierra dá vueltas, y el punto *B* anda el arco *BF* en el mismo tiempo que la cumbre de la torre anda el arco *AQ*, dividiendo este arco en quatro partes iguales, tirando los radios, y trazando los arcos *Cc*, *Dd*, *Ee*, el cuerpo andará, segun el supuesto del movimiento de la tierra, en quatro tiempos iguales los espacios *Ac*, *cd*, *de*, *eF*. Pero por el cálculo se puede hallar (50) que en el supuesto de durar 4″ el tiempo de la caida, ó ser la altura *AB* de 240 pies, las lineas *Ac*, *cd*, *de*, *eF* son iguales con muy corta diferencia; luego las velocidades por *Ac*, *cd*, *de*, *eF* son iguales. Por consiguiente el cuerpo cayendo desde *e* á *F*, esto es, al cabo de los quatro instantes de la caida, no dará en el plano orizontal con mas fuerza que al cabo del primer ó segundo instante. Esta conseqüencia no se puede admitir, porque la contradice la experiencia. Luego &c.

Resp. Le hará poca fuerza esta objecion al que tuviere presente que para apreciar la fuerza con que un cuerpo dá en otro, se debe atender no solo á la velocidad, mas tambien al ángulo de la inclinacion con que choca. Es evidente que la linea *eF*, ó el camino que anda el cuerpo en el último instante de

su

su caida, es mas directo respecto del plano orizontal que la linea *de*, y *de* mas que *cd*, y *cd* mas que *Ac*. Luego el choque será mayor en los instantes mas remotos del principio de la caida. Fig. 295.

706 IV. La tierra es una mole pesada, vil y grosera, que parece dotada de poca aptitud para el movimiento; es un absurdo transformarla en un astro que se pasee por la concavidad del firmamento.

Resp. Convienen todos los Astrónomos en que el sol es mucho mayor que la tierra. Luego si el sol se mueve, segun quieren los mismos que proponen este argumento, con mas facilidad se moverá la tierra. Tampoco es la tierra mas grosera que los otros planetas, los quales son por la mayor parte tan grandes como la tierra, sin que por eso se nos hagan increibles sus movimientos.

707 V. Si la tierra se mueve al rededor del sol en el discurso de un año, la tierra que al principio de su revolucion anua se halla á una distancia determinada de una estrella dada, seis meses despues estará mas cerca de ella todo lo que coge el diámetro de su órbita, y deberá verla en un ángulo mayor que antes. Esta conseqüencia no concuerda con las observaciones, pues en todos los tiempos del año se vé en un mismo ángulo una estrella determinada.

Resp. A pesar del movimiento anuo de la tierra las estrellas se han de ver constantemente en un mismo ángulo, porque la órbita de la tierra no es mas que un punto en comparacion de la gran distancia á que están de nosotros las estrellas fixas. Como el exe de la tierra siempre corresponde á un mismo punto del cielo estrellado, no pueden menos de estar tan distantes las estrellas, que todo el espacio que anda el exe de la tierra se pierde en la inmensidad de esta distancia, y no es respecto de ella mas que un punto. En otros tiempos les repugna-

Fig. naba á los Filósofos admitir un espacio inmenso entre la órbita de saturno y las estrellas fixas, porque le tenian por inútil. Pero está demostrado dias ha que dicho espacio inmenso sirve para las órbitas de los cometas, que por ser sumamente excéntricas, le necesitan todo para sus revoluciones.

708 VI. Se nos podrá replicar que si fuese tanta como suponemos la distancia de las estrellas á la tierra, se seguiría indispensablemente que las estrellas serían mayores que el sol; se seguiría que serían tan grandes como el diámetro de la órbita terrestre. Porque, segun afirman algunos Autores, se vén las estrellas en un ángulo de un minuto, y por otra parte el ángulo en que se vería desde una estrella el diámetro de la órbita anua sería tambien de un minuto; luego las estrellas serían tan grandes como la órbita terrestre.

Resp. Es falso que las estrellas, ni aun las de primera magnitud, se vean en un ángulo de un minuto. Creyéronlo así algunos Astrónomos fundándose en algunas observaciones muy imperfectas. No llega ni á un segundo el ángulo en el qual se vén con los mejores anteojos las estrellas de primera magnitud. Hay al rededor de las estrellas, particularmente quando se observan por la noche, una luz falsa ó scintilacion que las hace parecer mayores de lo que son. Sin embargo se desaparece la mayor parte de esta scintilacion, mirando las estrellas por un agugero hecho en un naype con la punta de un alfiler, y aun mirándolas con un buen anteojo que quita la mayor parte de la scintilacion, y nos manifiesta las estrellas como puntitos, y mucho menores que quando las miramos con la vista sola. Sin embargo, sabemos que los anteojos amplifican los objetos (523), y todo esto prueba quan poco perceptible es para nosotros el diámetro de las estrellas.

Se

709 Se nos preguntará tal vez ¿como podemos Fig.
percibir las estrellas fixas una vez que su diámetro aparente es tan pequeño?

Responderémos que la scintilacion que acompaña á los cuerpos luminosos es causa de que se les vé á distancias tan grandes, todo al reves de lo que sucede con los cuerpos opacos. Enseña la experiencia que una acha encendida se vé de noche en un ángulo muy perceptible á la distancia de mas de dos leguas; siendo así que si ponemos de dia á la mayor luz posible un objeto qualquiera, á la misma distancia no será posible alcanzarle con la vista. La razon es porque los cuerpos luminosos arrojan por todos lados una luz mas viva sin comparacion que la luz reflexa, y esta, debilitada por la reflexíon, apenas se percibe á una distancia notable.

710 VII. Algunos pretenden que no se puede alcanzar el movimiento del paralelismo del exe de la tierra, ni como un solo y mismo cuerpo puede tener dos movimientos distintos, el uno de traslacion que lleva su centro de un lugar á otro, el otro que muda la posicion de su exe.

Resp. Los que proponen esta dificultad se alucinan, porque miran el paralelismo del exe de la tierra como un movimiento particular de este planeta. El paralelismo del exe de la tierra no es mas que la situacion del exe que no varía, porque no hay para esto causa alguna; basta que el exe de la tierra se dirigiese al principio ácia un punto del cielo, para que se dirija constantemente ácia él, bien que la tierra tenga un movimiento anuo en una direccion determinada. Así vemos que un trompo dá vueltas encima de una mesa en la misma direccion inicial, aunque se suba, se baxe, ó se mude de lugar la mesa.

Sa-

Fig.

Satisfácense los argumentos que se fundan en algunos textos de la Sagrada Escritura.

711 Todos estos argumentos se satisfacen con las consideraciones siguientes.

Sería un temerario el que intentase excluir de los libros sagrados todas las metáforas, todas las comparaciones, todas las figuras recibidas entre los hombres. Los Astrónomos tambien dicen el sol nace, el sol se pone, y lo dirán eternamente, sin que por eso sea su ánimo desconocer el verdadero estado de la naturaleza. Si Dios conversára con los hombres, diría lo mismo que Josue, y Josue no podia decir otra cosa, quando mandó parar el sol. Sería muy extraño pretender que un General de exército, qual era Josue, se entretuviese en dar una leccion de Astronomía, tratándose de manifestar á su exército con una victoria la gloria y el poder de Dios, y dexando el lenguage que sus soldados podian entender, mandase á la tierra se parára. Le hubiera sido preciso darles la razon de tan extraño modo de hablar, y empeñarse en una disertacion muy intempestiva é impertinente. Así, aun quando Josue hubiera sabido por inspiracion divina una cosa que de su tiempo se ignoraba, no podia menos de explicarse conforme refiere la Escritura.

Lo propio dirémos de los demas textos de la Biblia, en los quales los Autores sagrados no podian menos de hablar conforme se hablaba y hablamos nosotros quando decimos el nacer, el ocaso, el movimiento, la desigualdad del sol.

712 Los textos de la Sagrada Escritura que parecen contrarios al movimiento de la tierra, no se deben entender en su sentido propio y literal, sino en el sentido comun conforme hablan y relatan generalmente los hombres. Hay muchos textos

tos de la Escritura, ademas de los que se citan Fig.
contra *Copérnico*, que hablan de Astronomía y Física, los quales se viene á los ojos que no se deben entender al pie de la letra, como quando Dios dice: *Tellus fundata super maria.* Psalm. 23 ó quando el Eclesiastés dice: *Terra in æternum stat.* En los textos de la Escritura que hablan del movimiento del sol, no se trasluce, ni se puede sospechar siquiera que los Escritores sagrados tuviesen ánimo de decidir la qüestion fisica, y fundar ó desterrar acerca de este punto alguna opinion.

713 No tenemos obligacion de creer que por el don de profecía supiesen los Autores sagrados las cosas profanas que no tenian relacion con los sucesos que escribian, ó no alteraban su esencia. Ni los Autores sagrados, ni los Santos Padres, con cuya autoridad se puede argüir en estos asuntos, sabian la Astronomía. Tal fué San Agustin, una de las lumbreras de la Iglesia, que negaba los antípodas. *De Civit. Dei lib.* 16. *cap.* 9.

714 No hay ninguna decision formal de la Iglesia contra el sistema copernicano. Verdad es que la Congregacion de los Cardenales Inquisidores dió un decreto con fecha de 5 de Marzo de 1616 contra las obras de *Corpérnico*, *Zúñiga y Fuscarini*, y otro contra *Galileo* con fecha de 22 de Junio de 1633, sentenciándole á que abjurase el error del sistema de *Copérnico*. Pero esta sentencia no le califica de heregía; solo declara que es sospechoso, y esto no prohibe su justificacion. Se tuvo por preciso prohibirle para atajar los inconvenientes que en aquellos tiempos podian resultar de consentir sobrada libertad á los ingenios. Pero siempre ha sido lícito aun en Roma admitirle como hypótesi, y lo mismo podrán hacer todos los que tuvieren por mas seguro este camino.

Es-

Fig.

Explica felicísimamente el sistema copernicano todos los fenómenos celestes.

715 El *movimiento diurno* de todo el cielo se explica con suma facilidad en este sistema. Basta con efecto que la tierra dé una vuelta al rededor de su exe de occidente á oriente para que nos parezca que todos los astros dán la vuelta de oriente á occidente.

296. Sea *BDAE* el globo de la tierra; *BA* el exe de la tierra dirigido al punto *P* del cielo; *DE* el paralelo que anda un punto *D* de la tierra en virtud de su movimiento diurno; *F* el punto de la esfera celeste que corresponde verticalmente al punto *D* de la tierra; *G* el punto que corresponde verticalmente al punto *E*; la linea *CDF* que es la vertical del punto *D*, dando la vuelta con él al rededor del pnnto *C*, y del exe *CP*, traza con este movimiento la superficie de un cono, cuyo vértice está en el centro *C* de la tierra, y la base coge desde *F* á *G*; el círculo celeste *FG* paraleló al equador, es la base del cono que traza la linea del zenit *CDF*. No está en el mismo plano que el paralelo terrestre *DE*, pero le corresponde esencialmente, pues todos los puntos de este paralelo celeste *FG* distan del polo celeste *P* el mismo número de grados que el punto *D* dista del polo *A* de la tierra. La linea del zenit *CDF* encontrará en el discurso de las 24 horas todos los puntos del cielo que están á la misma distancia del polo *P*, esto es, todos los puntos que están sobre el paralelo celeste *FHG*, y todos parecerán en su zenit.

716 El movimiento anuo ó el movimiento aparente del sol en la eclíptica se explica con igual facilidad en este sistema, y hemos hecho patente (701) que es una conseqüencia del movimiento de la tierra.

717 La mudanza de las estaciones se explica en es-

282
R N M O L Q

283
PZ T R H O

284
A K P E B M H O F S Q R L T

288
A a a′ B S b C O

289
B A S D O C E

290
F V S H G T

291
M R T N S P

295
A C c D d E e B Q F

294
B′ B C C S A A′ D D

S

este sistema por medio de la inclinacion y del paralelismo constante del exe de la tierra; este punto pide mucha atencion, y de todos los fenómenos es el que manifiesta mas el gran talento de Copérnico. El fenómeno de las estaciones se reduce á esto; los paises de la tierra que están debaxo del trópico de cancer, á los $23^{\circ}\frac{1}{2}$ de latitud septentrional, qual es Chandernagor, vén pasar el sol por su zenit á las 12 del dia en tiempo del solsticio de verano, del mismo modo que los paises que tienen la misma latitud, ó están á la misma distancia del equador. Al contrario, los que están á $23^{\circ}\frac{1}{2}$ de latitud meridional al otro lado del equador debaxo del trópico de capricornio, como Riojaneiro, tienen el sol á su zenit el dia 21 de Diciembre, quando el sol está en el solsticio de invierno. Para que este efecto se verifique en el supuesto de moverse la tierra, basta colocarla de manera que el rayo solar dirigido ácia la tierra, dé en el primer caso en el uno de los trópicos terrestres; y en el segundo, en el trópico opuesto.

Fig.

718 Sea *S* el sol; *C* y *D* dos puntos diametralmente opuestos de la órbita anua de la tierra; *C* el punto donde se halla el dia 21 de Junio; *D* el punto donde está el dia 21 de Diciembre; *EF* el diámetro del equador terrestre; *GH* el diámetro del trópico de Chandernagor; *IK* el diámetro del trópico de Riojaneiro. Si el exe *PA* de la tierra está inclinado de manera que el equador *EF* forme un ángulo de $23^{\circ}\frac{1}{2}$ con el rayo solar *SC*, esto es, con la ecliptica (porque el rayo solar siempre está en la ecliptica); siendo el ángulo *HCF* ó el arco *HF* de $23^{\circ}\frac{1}{2}$, el rayo solar irá á parar al punto *H* de la tierra distante del equador *F* la misma cantidad de $23^{\circ}\frac{1}{2}$; quiero decir que Chandernagor, y todos los puntos del mismo paralelo tendrán el sol á su zenit aquel dia. Si al contrario el exe *PA* fuese recto ó perpendicular 297.

al

Fig. al rayo solar *SC*, el diámetro *ECF* del equador cae-
297. ría sobre el rayo *SC*, y se confundiría con él. Luego el sol estaría perpendicular á los lugares que están sobre el equador terrestre, y los paises que están debaxo del equador tendrían el sol á su zenit. Pero la inclinacion del exe *PA* que forma con el diámetro *CSD* de la eclíptica, ó con el rayo solar *SHC*, un ángulo *PCH* de 66° $\frac{1}{2}$, es causa de que el rayo solar vá á pasar perpendicularmente por un punto *H* de la tierra distinto del punto *F* del equador. Todos los paises que están debaxo del círculo cuyo diámetro es *GH*, esto es, debaxo del trópico de cancer, dando aquel dia la vuelta al rededor del exe *PA*, pasarán unós tras de otros por el punto *H*, todos tendrán el sol perpendicular á su zenit, al pasar en *H* por debaxo del rayo solar *SH*.

719 Al cabo de seis meses la tierra estará del otro lado del sol, en el punto *D* diametralmente opuesto al punto *C*; esto sucede en el solsticio de invierno el dia 21 de Diciembre. Supongamos que entonces el exe *TB* sea paralelo al exe *PA* de la situacion precedente, de modo que esté inclinado en la misma direccion y del mismo lado del cielo, que seis meses antes. Entonces el trópico de cancer *GH* estará en la situacion *LM*, y el rayo solar *SRD*, en vez de ir á parar al trópico de cancer en el punto *L*, como en el primer caso, corresponderá al punto *R* del trópico *RV*, que es el de Riojaneiro, esto es, de los paises que tienen 23° $\frac{1}{2}$ de latitud meridional. Aquel dia todos los paises que están debaxo del expresado trópico, cuyo diámetro es *RV*, pasarán sucesivamente por el punto *R* dando la vuelta al rededor del exe *TB*, y todos tendrán el sol á su zenit; habrá, pues, trazado el sol verdaderamente el paralelo de 23° $\frac{1}{2}$, conforme debe ser en virtud del movimiento diurno.

Quan-

720 Quando el sol correspondia al trópico de cancer, y era perpendicular al punto *H*, todos los paises situados del lado del pólo árctico *P*, ó en el emisferio boreal de la tierra estaban en verano. Pero llegando el rayo solar á ser perpendicular en *R* al trópico austral ó de capricornio, los paises situados sobre *LM*, y todos los que están al norte del lado del polo árctico *T*, estarán en invierno, porque les dá oblicuamente el rayo solar. Los paises meridionales situados en el paralelo *RV*, y del lado del polo austral y antártico *B*, estarán en verano, del mismo modo que estaban en verano los paises septentrionales quando la tierra estaba en *C*. Fig. 297.

721 Así, una vez supuesto el paralelismo del exe de la tierra, ó de las lineas *PA*, *TB*, se explica maravillosa y sencillamente el paso del invierno al verano. Por lo que mira á la primavera y al otoño, serán entre el invierno y el verano, y al pasar del verano al invierno; y suponiendo que el exe siempre se mantenga paralelo á sí mismo, quando la tierra estuviere por los meses de Marzo y Setiembre en los signos de Aries y Libra, el rayo solar corresponderá perpendicularmente á un punto del equador, una vez que en los meses de Junio y Diciembre correspondia al norte y al sur del equador.

722 Para explicar las demas apariencias que ocasiona en el cielo el movimiento de la tierra, servirá tener presente la siguiente proposicion.

Si el ojo del observador llevado del movimiento anuo de la tierra, prosigue viendo succesivamente un mismo astro por rayos paralelos unos con otros, le parecerá que el astro no se habrá movido.

Supongamos que el observador puesto en *O* vé un astro por un rayo *OS*, y que llegado á *P* le vé por un rayo *PM* paralelo al primero; digo que en todo el tiempo que gastó el ojo para ir de *O* á *P*, le 298.

Fig. 098. parecerá que el astro no se ha movido; quiero decir, que le verá en la misma situacion, en la misma region del cielo, y se le figurará el astro inmobil ó *estacionario*; porque, una vez que no podemos formar juicio de la situacion de un astro, sino comparándole con algun punto del cielo, con algun objeto, algun astro, algun plano, alguna linea; sea *OPR* la linea ó direccion primitiva que tomamos por término de comparacion. El ángulo *SOR* y el ángulo *MPR* son de todo punto iguales, por ser *OS* paralela á *PM*, segun el supuesto; luego la distancia aparente de *S* y *M* respecto del término de comparacion *OPR*, será en ambos casos de 90°. Por ser esta distancia la misma, no habrá ninguna señal, ninguna apariencia de movimiento en el objeto *S*; y por lo mismo le miraremos como inmobil.

723 El que tuviere esto presente echará de ver que, conforme hemos supuesto, no se puede percibir el movimiento de un objeto sino comparándole con otro objeto. Si no hubiese en el mundo mas que un astro y un hombre, y fuesen ambos llevados con un movimiento comun por los espacios imaginarios, sería imposible que el hombre percibiera este movimiento, pues no habría ninguna señal que se le diera á conocer.

724 Si se nos pregunta ahora ¿qual es el objeto de comparacion, y si hay un término fixo como la linea *OR*, con el qual un Astrónomo pueda comparar los astros, para saber si tienen ó no algun movimiento aparente? Responderémos que tales son desde luego el plano del equador ó de la ecliptica, quando se trata de las estrellas fijas; como estos planos son fijos, ó sabemos por lo menos qué variaciones padecen, á ellos referirémos las variaciones aparentes de las estrellas fijas, para apreciar la cantidad de dichas variaciones.

El

725 El punto equinoccial ó la linea tirada al primer punto de Aries, es tambien un término fijo de comparacion que la linea *OR* representa, y sirve igualmente para los planetas. Siempre que el rayo *OS* que señala el lugar de la ecliptica donde está la estrella, formare un ángulo recto con la linea *OR* que vá ácia el equinoccio, sabrémos que el astro está á 90° de longitud; esta longitud no variará mientras que el ángulo *MPR* fuere igual con el ángulo *SOR*. Fig. 298.

De la Refraccion Astronómica.

726 Por muchas proposiciones demostradas en los principios de Optica, consta que la atmósfera muda la direccion de los rayos de luz que la atraviesan; de donde resulta que no vemos los astros en su verdadero lugar.

Sea *ABD* la superficie de la tierra; *EKG*, la superficie exterior de la atmósfera, cuya densidad es sensible hasta algunas leguas de altura; *A*, el lugar del observador, y *MK* un rayo de luz que entra oblicuamente en la atmósfera por el punto *K*. Este rayo torcido en la atmósfera llega al punto *A* del mismo modo que si hubiese venido por la recta *NKA* (399); y el ojo recibe la impresion de la luz en la direccion *NKA* del rayo que llega al ojo en *A*; el observador refiere al rayo *AKN* el astro que está verdaderamente en *M*; por manera que la refraccion es causa de que parezca el astro mas alto la cantidad del ángulo *NKM*, el qual se llama *refraccion astronómica*. 299.

727 Para determinar la cantidad de esta refraccion propondrémos un caso particular. Supongamos, v. gr. que la altura del sol observada á seis horas de distancia del meridiano por la mañana y por la tarde, sea de 9° cabales, y que por el cálculo (mas

 ade-

Fig. adelante enseñarémos como se hace) no deba pasar de 8° 54'; sabremos que á la altura aparente de 9° hay 6' de refraccion, y que el sol parece 6'. mas alto de lo que corresponde.

300. En el triángulo *PZS* cuyos tres ángulos están respectivamente en el polo, en el zenit y en el sol, suponemos conocida la distancia *PZ* del polo al zenit, y la distancia *PS* del sol al polo boreal del mundo, sin atender á la refraccion; bien que el error que de aquí puede provenir en las mayores refracciones es muy corto; tambien suponemos que se haya averiguado por observacion, conforme manifestarémos despues, qué hora es, y el ángulo horario *ZPS*; hallarémos con resolver el triángulo *PZS* (II. 733 *B*) la distancia *ZS* al zenit; esta es el complemento de la altura verdadera, una vez que los dos lados *PZ* y *PS*, igualmente que el ángulo *P*, son cantidades dadas en las quales no influye la refraccion. Esta altura verdadera, que saca el cálculo, siempre es menor que la altura aparente observada con el quadrante.

De la Paralaxe.

728. La *paralaxe* es la diferencia que vá del sitio donde se vé un astro mirándole desde la superficie de la tierra, al lugar donde parecería si le mirásemos desde el centro de la tierra. Suele llamarse *paralaxe diurna* para distinguirla de la paralaxe anua, de la qual tratarémos despues.

Todos los movimientos celestes deben referirse al centro de la tierra para que parezcan regulares; porque como los diferentes puntos de la superficie de la tierra tienen situaciones distintas unos respecto de otros, no pueden menos de ver un astro con aspectos diferentes. Es preciso trasladarse al centro, para ver-

lo

lo todo en su verdadero sitio, y averiguar la verdadera ley de los movimientos celestes. Por este motivo se hace indispensable calcular á cada paso la paralaxe, para reducir el lugar de un planeta observado al lugar donde se le vería desde el centro de la tierra. Fig.

729 Sea *T* el centro de la tierra; *O*, el punto de la superficie donde está el observador; *TOZ*, la linea vertical, ó la linea que pasa por el zenit *Z*, por el punto *O* del observador, por el centro *T* de la tierra, y por el nadir. Un planeta *P* colocado en la linea del zenit, siempre corresponde á un mismo punto del cielo, ya se le mire desde el punto *O*, ya desde el centro *T*; el punto del cielo que corresponde al zenit, señala el lugar del astro en ambos casos. Luego *un astro que parece al zenit no tiene paralaxe.* 301.

730 Si el planeta en vez de estar en la linea del zenit *TOPZ*, parece en la linea orizontal *HO*, perpendicular á la primera; como su distancia *TH* al centro de la tierra es la misma que la distancia *TP*, el lugar del planeta *H* visto desde el centro de la tierra está en la linea *TH*, el lugar del planeta visto desde el punto *O*, está sobre la linea *OH*. Estas dos lineas *TH*, *OH*, no corresponden á un mismo punto del cielo; porque mas allá del punto *H* donde se cruzan, se ván apartando una de otra, irán á parar á distintos puntos del firmamento, y le señalarán al astro puesto en *H* dos situaciones diferentes, cuya diferencia es lo que propiamente llamamos paralaxe.

731 Comparemos estas dos diferentes situaciones, ó estos dos diferentes puntos con el punto del zenit, ó el punto del cielo que está en la linea *TOZ* tirada por el centro *T* y el punto *O* de la superficie. El ángulo *ZOH* que la linea vertical *OZ* forma con la linea *OH*, en la qual se vé el planeta, es la distancia aparente del astro al zenit. Si estuviéramos

Fig.

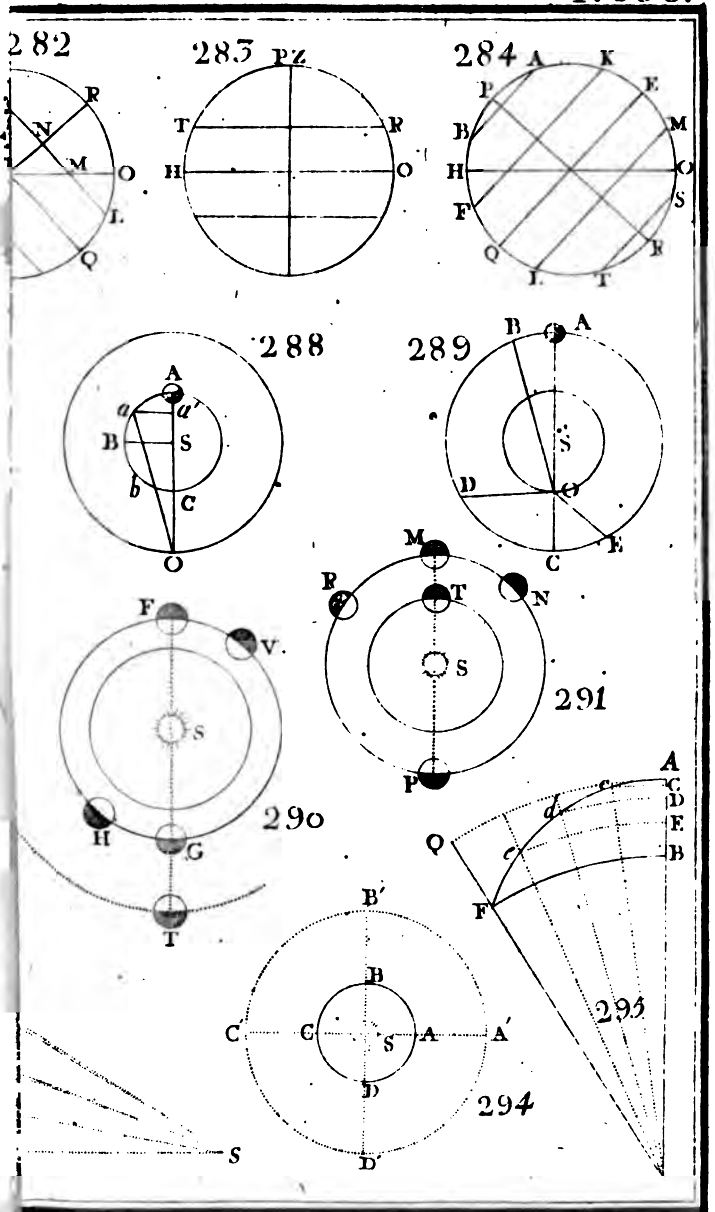
Explica felicísimamente el sistema copernicano todos los fenómenos celestes.

715 El *movimiento diurno* de todo el cielo se explica con suma facilidad en este sistema. Basta con efecto que la tierra dé una vuelta al rededor de su exe de occidente á oriente para que nos parezca que todos los astros dán la vuelta de oriente á occidente.

296. Sea *BDAE* el globo de la tierra; *BA* el exe de la tierra dirigido al punto *P* del cielo; *DE* el paralelo que anda un punto *D* de la tierra en virtud de su movimiento diurno; *F* el punto de la esfera celeste que corresponde verticalmente al punto *D* de la tierra; *G* el punto que corresponde verticalmente al punto *E*; la linea *CDF* que es la vertical del punto *D*, dando la vuelta con él al rededor del pnnto *C*, y del exe *CP*, traza con este movimiento la superficie de un cono, cuyo vértice está en el centro *C* de la tierra, y la base coge desde *F* á *G*; el círculo celeste *FG* paraleló al equador, es la base del cono que traza la linea del zenit *CDF*. No está en el mismo plano que el paralelo terrestre *DE*, pero le corresponde esencialmente, pues todos los puntos de este paralelo celeste *FG* distan del polo celeste *P* el mismo número de grados que el punto *D* dista del polo *A* de la tierra. La linea del zenit *CDF* encontrará en el discurso de las 24 horas todos los puntos del cielo que están á la misma distancia del polo *P*, esto es, todos los puntos que están sobre el paralelo celeste *FHG*, y todos parecerán en su zenit.

716 El movimiento anuo ó el movimiento aparente del sol en la eclíptica se explica con igual facilidad en este sistema, y hemos hecho patente (701) que es una conseqüencia del movimiento de la tierra.

717 La mudanza de las estaciones se explica en es-



282
R
N
M
O
L
Q
283
PZ
T
R
H
O
284
A
K
P
E
M
B
H
O
S
F
Q
R
L
T
288
A
a
a'
B
S
b
C
O
289
B
A
S
D
O
E
C
M
R
T
N
S
291
F
V.
S
H
G
T
290
A
C
D
E
B
Q
d
e
F
295
B'
B
C
C
S
A
A'
D
294
D'
S

Fig.

Explica felicísimamente el sistema copernicano todos los fenómenos celestes.

715 El *movimiento diurno* de todo el cielo se explica con suma facilidad en este sistema. Basta con efecto que la tierra dé una vuelta al rededor de su exe de occidente á oriente para que nos parezca que todos los astros dán la vuelta de oriente á occidente.

296. Sea *BDAE* el globo de la tierra; *BA* el exe de la tierra dirigido al punto *P* del cielo; *DE* el paralelo que anda un punto *D* de la tierra en virtud de su movimiento diurno; *F* el punto de la esfera celeste que corresponde verticalmente al punto *D* de la tierra; *G* el punto que corresponde verticalmente al punto *E*; la linea *CDF* que es la vertical del punto *D*, dando la vuelta con él al rededor del punto *C*, y del exe *CP*, traza con este movimiento la superficie de un cono, cuyo vértice está en el centro *C* de la tierra, y la base coge desde *F* á *G*; el círculo celeste *FG* paraleló al equador, es la base del cono que traza la linea del zenit *CDF*. No está en el mismo plano que el paralelo terrestre *DE*, pero le corresponde esencialmente, pues todos los puntos de este paralelo celeste *FG* distan del polo celeste *P* el mismo número de grados que el punto *D* dista del polo *A* de la tierra. La linea del zenit *CDF* encontrará en el discurso de las 24 horas todos los puntos del cielo que están á la misma distancia del polo *P*, esto es, todos los puntos que están sobre el paralelo celeste *FHG*, y todos parecerán en su zenit.

716 El movimiento anuo ó el movimiento aparente del sol en la eclíptica se explica con igual facilidad en este sistema, y hemos hecho patente (701) que es una conseqüencia del movimiento de la tierra.

717 La mudanza de las estaciones se explica en es-

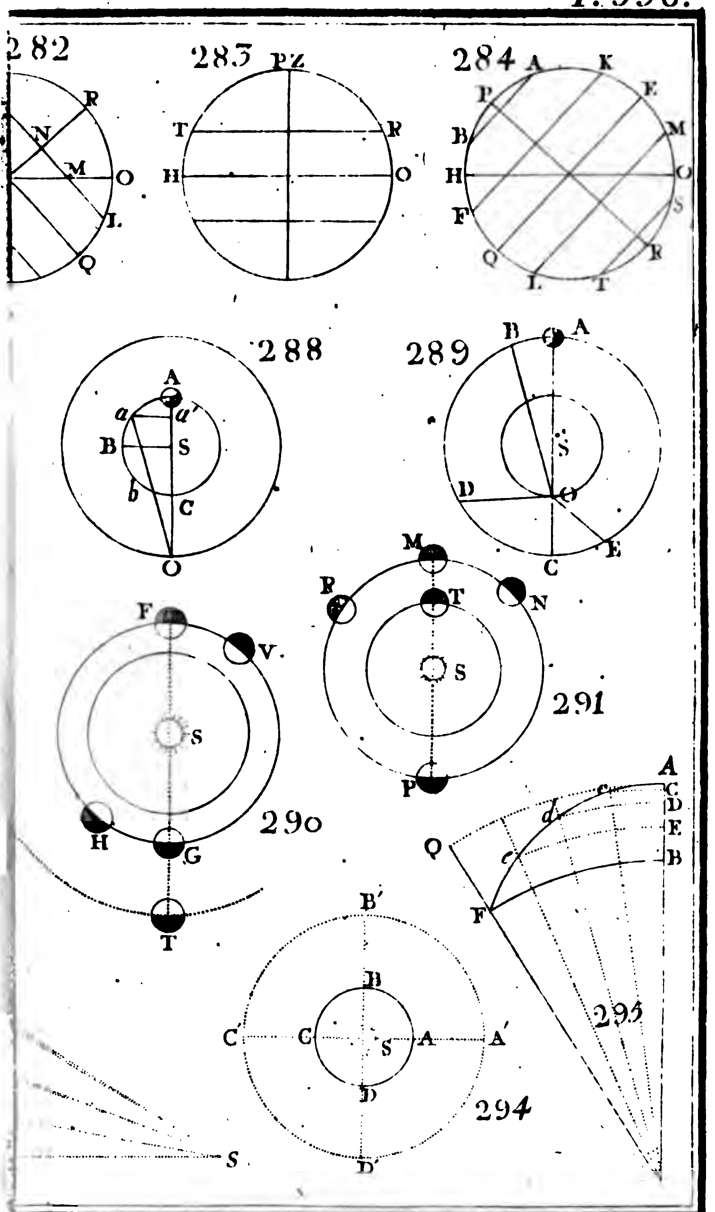

282
R
N
M
O
L
Q
283
PZ
T
R
H
O
284
A
K
P
E
B
M
H
O
F
S
Q
R
L
T
288
A
a
a'
B
S
b
C
O
289
B
A
S
D
O
C
E
M
R
T
N
S
291
F
V.
S
H
G
290
T
A
C
D
E
B
Q
F
295
B'
B
C'
C
S
A
A'
D
294
D'
S

Fig.

DE LAS ESTRELLAS FIXAS.

742 Por lo mismo que las estrellas fixas se mantienen constantemente en un mismo sitio, sirven para medir el movimiento de los demas astros, pues conforme estos se apartaren en mas ó menos tiempo de alguna estrella con la qual los comparemos, se moverán mas despacio ó mas aprisa. Este es el motivo por que los Astrónomos han distribuido las estrellas en varios montones ó grupos, llamados *constelaciones*, y para mayor individualidad señalan separadamente cada estrella de un grupo con una letra griega.

743 Las estrellas se dividen en varias clases, segun la viveza de su luz. Las mas resplandecientes se llaman estrellas de *primera magnitud*; las que son menos brillantes, se llaman estrellas de *segunda magnitud* &c.

744 Las constelaciones están divididas en tres clases; la primera se compone de las constelaciones del zodiaco; la segunda, de las que están en la parte boreal del firmamento; y la tercera, de las constelaciones que están en la parte austral. Todas están en la tabla siguiente, con los nombres de las figuras que en ellas se han dibuxado para ayudar á la fantasía.

DE

TABLA DE LAS CIEN CONSTELACIONES, que se figuran en los globos celestes.

12 Constelaciones del zodiaco.

- Aries.
- Tauro.
- Géminis.
- Cancer.
- Leo.
- Virgo.
- Libra.
- Escorpio.
- Sagitario.
- Capricornio.
- Aquario.
- Piscis.

23 Constelaciones boreales de los antiguos.

- La Osa mayor.
- La Osa menor.
- El Dragon.
- Cepheo.
- Casiopea.
- Andromeda.
- Perseo.
- Pegaso.
- El Caballo chico.
- El Triángulo boreal.
- El Cochero.
- La Cabellera de Berenice.
- El Boyero.
- La Corona boreal.
- El Serpentario ú Ophiuco.
- La Serpiente.
- Hércules.
- El Aguila.
- Antinoo.

Siguen las 23 Constelaciones boreales.

- La Flecha.
- La Lira.
- El Cisne.
- El Delfin.

15 Constelaciones australes de los antiguos.

- Orion.
- La Ballena.
- El Erídano.
- La Liebre.
- El Perro grande.
- El Perro chico.
- La Hydra hembra.
- La Copa.
- El Cuervo.
- El Centauro.
- El Lobo.
- El Altar.
- El Pez austral.
- El Navío.
- La Corona austral.

22 Constelaciones que añadieron Hevelio, el P. Antelmo, Haley &c.

- Cameleopardo.
- El Rio Jordan.
- El Rio Tigris.
- El Cetro, y la Flor de Lis.
- La Paloma.
- El Licornio ó Monoceronte.

Siguen las 22 Constelaciones que añadieron Hevelio, el P. Antelmo, Haley &c.

- La Cruz.
- El Sextante de Urania.
- El Romboyde.
- Los Perros de caza.
- El Leon chico.
- El Lince.
- La Zorra.
- El Ganso.
- El Escudo de Sobieski.
- El Triángulo chico.
- El Can cerbero.
- Rameau.
- El Lagarto.
- El Monte Ménalo.
- El Corazon de Carlos II.
- La Encina de Carlos II.

14 Constelaciones australes de Teodori, Bayer.

- El Indio.
- La Grulla.
- El Fenix.
- La Abeja ó la Mosca.
- El Triángulo austral.
- El Ave del Paraiso.

Siguen las 14 Constelaciones australes.

- El Pabo Real.
- El Tucan.
- La Hydra macho.
- La Dorada.
- El Pez volador.
- El Camaleon.

Tambien hay la Nube grande, y la Nube chica.

14 Constelaciones australes del Abate de la Caille.

- El Taller del Escultor.
- El Horno de Chímica.
- El Relox Astronómico.
- La Reticula romboid.
- El Buril del Grabador.
- El Caballete del Pintor.
- La Brújula.
- La Máquina Pneumática.
- El Octante de reflexion.
- El Compás.
- La Esquadra, y La Regla.
- El Telescopio.
- El Microscopio.
- La Montaña de la mesa.

En

Fig. 745 En el Tomo VII de mi Curso dexo especificados los métodos que hay para conocer las constelaciones; pero son de muchísimo socorro para el mismo fin los Atlas celestes que se han grabado, y en particular los dos mapas celestes de *Senex* grabados en Londres. Entre todos los mapas celestes el que mas usan los Astrónomos es el que representa las doce constelaciones del zodíaco, y hay uno muy bueno publicado en París en 1755 por *Mr. Le Monier*, individuo de aquella Real Academia de las Ciencias.

De las Estrellas nuevas y variables, de la Via lactea, de la Luz zodiacal, &c.

746 Ademas de las estrellas que componen las constelaciones, se dexan ver á veces algunas estrellas *nuevas*, y otras que se llaman *variables*. En la Ballena hay una variable, y en el Cisne hay tres. Las nuevas se dexan ver algun tiempo, y despues se desaparecen totalmente. Las variables se manifiestan muy brillantes al principio, despues vá menguando su resplandor, se desaparecen por último, y al cabo de algun tiempo vuelven á aparecer.

747 La *via lactea*, que tambien se llama el *camino de Santiago*, es una blancura irregular que dá la vuelta al cielo en forma de faja. Es constante que parte del resplandor y blancura de la via lactea proviene de la luz de las estrellas que en ella hay á millones. Sin embargo, ni aun con el socorro de los mejores telescópios se vén bastantes, ni bastante cerca unas de otras, para que atribuyamos á las que se vén la blancura de la via lactea, tan reparable con la vista sola. Parece, pues, que no son las estrellas la sola causa de la blancura de la via lactea, bien que no sabemos como explicarla.

748 Así como la via lactea forma una blancura al re-

rededor del cielo, se hallan tambien en otras partes donde no llega la via lactea trechos blancos, que mirados con la vista sola parecen estrellas poco luminosas, y en el telescopio forman una blancura ancha é irregular, en la qual no se distinguen estrellas, ni espacios sembrados de manchas blancas ó estrellitas. Estas apariencias se llaman *estrellas nebulosas.* Fig.

749 Tambien se repara en el cielo en algunos tiempos del año despues de puesto el sol, ó antes que nazca, una luz ó blancura bastante parecida á la via lactea, y se llama *luz zodiacal.* Esta luz se parece á una lanza ó pirámide, cuya base está del lado del sol, y su exe, inclinado al orizonte, pasa todo él por el zodíaco, cuya direccion sigue la expresada luz.

750 La luz del zodíaco no es otra cosa que la atmósfera del sol; es un fluido ó materia tenue luminosa por sí, ó alumbrada de la luz del sol, que rodea este astro. Esta luz del zodíaco desde el sol que es su base hasta su vértice coge 100° ó 120°; su ancho es desde 8° hasta 30°.

De las Ascensiones rectas, Declinaciones, Longitudes y Latitudes de los Astros.

751 Supongamos que se ha reparado en el cielo una estrella inmediata al equinoccio, ó al punto donde se cortan la eclíptica y el equador, y que por medio de esta se quieran determinar las posiciones de las demas estrellas; lo mas acertado será seguir el equador al rededor del cielo conforme los astros vayan pasando unos tras de otros con el movimiento diurno; los intervalos de uno á otro se llaman *diferencias de ascension recta.* Llámanse así, quando se supone la esfera recta, esto es, que el equa-

Fig. equador corta á ángulos rectos el orizonte, conforme sucedería si estuviéramos debaxo de la linea equinoccial, porque los astros se levantan en derechura, y sin ninguna oblicuidad; entonces las estrellas que están 15° mas al oriente que la primera estrella desde la qual se empieza, nacen una hora mas tarde; y se dice que su diferencia de ascension recta es de 15° ó de una hora.

752 En la esfera obliqua donde el equador está inclinado al orizonte, lo que sucede en toda Europa, no se toma para esto el nacer de las estrellas, sí su paso por el meridiano. Porque como este círculo siempre es perpendicular al equador, todas las estrellas que corresponden perpendicularmente al mismo punto del equador, pasan juntas por el meridiano, y decimos que su ascension recta es una misma; porque si estuviéramos debaxo del equador, las veríamos nacer todas á un tiempo.

302. 753 Sea EQ una porcion del equador; ZM, el meridiano; las estrellas A y B que pasan por el meridiano con el punto M del equador tienen su ascension recta señalada con el punto M; y si este punto del equador pasa por el meridiano una hora mas tarde que el punto equinoccial, decimos que todas estas estrellas tienen una hora ó 15° de ascension recta; las que pasaren dos horas mas tarde que la primera estrella de Aries tendrán respecto de ella 30° de diferencia de ascension recta. Luego *la ascension recta de un astro es su distancia al equinoccio contándola en el equador*.

754 En conociendo la ascension recta de una estrella ó su distancia al equinoccio contándola á lo largo del equador, será muy facil de determinar la de todas las demas estrellas, observando que tiempo mas tarde que la primera pasan por el meridiano. Los intervalos de tiempo convertidos en grados á razon de

de 15° por hora (634), expresarán sus diferencias de ascension recta, las quales añadidas á la de la primera estrella que conocemos, expresarán las ascensiones rectas de todas las demas. En esto suponemos que sea conocido en el cielo el punto equinoccial, ó que se conozca de antemano la ascension recta de la primera estrella; mas adelante declararemos como esto se averigua. Fig. 302.

755 Quando vemos pasar juntas por el meridiano muchas estrellas, bien que tengan todas la misma ascension recta, están unas mas elevadas que otras; la una se vé en *A*, la otra en *B*, y su distancia al equador *EMQ* se llama su *declinacion*. Así, *BM* es la declinacion de la estrella *B*; *AM* es la declinacion de la estrella *A*. Si viéramos pasar la estrella *A* por el meridiano á 51° de altura (590), y supiésemos que la altura del equador es de 41° (620), inferiríamos que la estrella está 10° mas elevada que el equador, ó que tiene 10° de declinacion. Quando la estrella está mas arriba del equador ó del lado del norte, decimos que su declinacion es *boreal* ó septentrional; pero quando está mas abaxo, y mas baxa que el equador, ó del lado del medio dia, decimos que su declinacion es *austral* ó meridional.

756 Este es el motivo por que llamamos *círculos de declinacion* á todos los círculos que son perpendiculares al equador, y pasan por los dos polos del mundo. Estos círculos, considerándolos en la superficie de la tierra, son *meridianos*; son *círculos horarios*, quando atendemos á su distancia al meridiano, porque señalan la hora que es.

757 El movimiento diurno de todos los astros suministra un método muy sencillo para referirlos al equador, señalar sus situaciones á lo largo de este círculo celeste, esto es, sus ascensiones rectas, y sus distancias al mismo círculo, ó sus declinaciones.

Quan-

Fig. Quando referimos cada estrella al punto de la eclíptica al qual corresponde perpendicularmente, conforme lo estilan tiempos ha los Astrónomos, llamamos *longitudes* estas distancias medidas á lo largo de la eclíptica, y se empiezan á contar desde el punto equinoccial.

303. 758 Sea ♈*Q* el equador; ♈*C*, la eclíptica inclinada al equador 23° ½; *S*, una estrella que corresponde perpendicularmente al punto *M* del equador; si se tira un arco de círculo *SEB* perpendicular á la eclíptica, el punto *B* señalará el punto de la eclíptica al qual corresponde la estrella *S*, y el arco de la eclíptica ♈*B* será la longitud de la estrella. *Luego la longitud de un astro es el arco ó la distancia entre el equinoccio y el punto de la eclíptica*, *al qual corresponde perpendicularmente dicho astro.*

759 Entre varios astros que corresponden á un mismo punto de la eclíptica, los unos están mas próximos que otros á este círculo; tienen diferentes latitudes, quiero decir que están á distintas distancias de la eclíptica. Si la estrella puesta en *S*, dista de la eclíptica ♈*BC* la cantidad *SB* medida perpendicularmente, decimos que su latitud es *SB*; si estuviera en *E*, tendria la misma longitud, pero su latitud *EB* seria menor.

760 Los círculos trazados sobre la superficie del globo perpendiculares á la eclíptica, qual es *SB*, se llaman *círculos de latitudes*, porque sirven con efecto para contar las latitudes, al mismo tiempo que sirven para señalar las longitudes á lo largo de la eclíptica.

761 Las observaciones de los Astrónomos acerca de la posicion de los astros, siempre se apuntan por ascension recta y declinacion, por ser el equador y el meridiano círculos mas familiares y constantes, y mas fáciles de determinar, con lo que son las me-

didas mas naturales, fáciles y puntuales. Fig.

762 Sin embargo los Astrónomos cuentan despues los movimientos de los planetas por longitudes y latitudes, quiero decir que los refieren á la eclíptica en todas sus tablas Astronómicas. La razon de esta práctica es muy natural; porque el sol parece que se mueve en la eclíptica, de cuyo círculo distan tambien muy poco las órbitas de los planetas; sus desigualdades parecen menores, y de aquí tambien resulta mas uniformidad, facilidad y brevedad en las tablas Astronómicas.

763 Por consiguiente, la práctica corriente es observar la ascension recta y la declinacion de un astro; pero antes de apuntarla en las tablas generales de los movimientos celestes, se determina su longitud y latitud.

764 Una vez averiguadas la ascension recta y la declinacion de una estrella, se determina su longitud y latitud por la Trigonometría Esférica, pero en lugar de la ascension recta averiguada, se toma su distancia al equinoccio mas inmediato.

Sea *AE* la ascension recta de un astro qualquiera, 304.
ó su distancia al equinoccio mas inmediato, contándola en el equador y menor que 90°; *AS*, la declinacion del mismo astro, ó su distancia al equador; *EC*, la eclíptica; *SB*, la latitud que se busca del astro *S*, midiéndola con un arco perpendicular á la eclíptica, y *EB* su longitud, ó por mejor decir (758) su distancia al equinoccio mas inmediato, contándola en la eclíptica. Nos figurarémos un círculo máxîmo *ES*, que vá desde el punto equinoccial á la estrella, para formar un triángulo esférico *SEA*, rectángulo en *A*, con la ascension recta y la declinacion del astro, y otro triángulo esférico *SBE* rectángulo en *B*, con la latitud y la longitud del mismo astro. Resolverémos primero el triángulo *SAE*, rectángulo

Fig. en *A* (II. 718 *E*), en el qual conocemos dos lados,
304. y hallarémos el ángulo *SEA* y la hypotenusa *SE*. Por medio del ángulo *SEA* y del ángulo *BEA*, que es la oblicuidad de la eclíptica de $23^\circ \frac{1}{2}$, formaremos el ángulo *SEB*, que será su diferencia, si el punto *S* y el punto *B* estuvieren ambos mas altos ó mas baxos que el equador *EA*; al contrario, el ángulo *SEB*
305. será la suma del ángulo *SEA* y de la oblicuidad de la eclíptica *AEB*, si el astro *S* y el punto *B* de la eclíptica que le corresponde, estuvieren el uno al norte y el otro al medio dia del equador. Despues de formado el ángulo *SEB*, servirá con la hypotenusa *SE* para determinar (II. 718 *A*) la longitud *EB* y la latitud *BS* de una estrella, refiriéndola á la eclíptica. Por este método se han formado los catálogos de estrellas, donde ván señaladas las longitudes y latitudes de cada una en signos, grados, minutos y segundos.

765 Al mismo tiempo que se calcúla la longitud de una estrella, se puede tambien calcular el *ángulo de posicion BSA* ó *BSF*, que forma el círculo de latitud *BS* con el círculo de declinacion *SA*.

Variacion de la longitud de las estrellas, ó precesion de los equinoccios.

766 Comparando las determinaciones que hizo *Hiparco* 140 años antes de Christo de las longitudes de las estrellas, con las que han sacado los modernos, se ha averiguado que han caminado en longitud 26° 26′ en el discurso de 1878 años, de modo que corresponden $50'' \frac{2}{3}$ de aumento cada año en la longitud de las estrellas. Pero *Copérnico* y *Ticho-Brahe*, con los demas Astrónomos modernos, no dán mas que 50″ 20‴ de aumento á la expresada longitud. Una vez que la longitud de las estrellas tiene 50″ 20‴ de

de aumento cada año, es indispensable que el punto del equinoccio desde el qual se cuentan estas longitudes, retroceda la misma cantidad; sucederá, pues, que el sol llegará cada año á dicho punto antes que el año antecedente, y esta es la razon de llamarse este fenómeno la *precesion de los equinoccios*. Fig.

767 Tiene averiguado *Mr. de la Lande*, Astrónomo de la Real Academia de París, que la precesion de los equinoccios es de 1° 23′ 10″ por siglo, y que la revolucion total de las estrellas, ó por mejor decir la de los equinoccios respecto de las estrellas, es de 25972 años. A esta revolucion la llaman algunos el *año grande*.

Del paso de los astros por el meridiano, de su orto, ocaso, &c.

768 El paso de una estrella por el meridiano se calcula por medio de su diferencia de ascension recta entre el sol y la estrella; con efecto, para averiguar á qué hora la estrella ha de pasar, basta saber quanto tiempo pasó despues del sol, ó qué exceso su ascension recta lleva á la del sol. Si este exceso fuere de 15° en el instante que atraviesa el meridiano, es señal (634) de que es una hora de tiempo verdadero, que el sol pasó por el meridiano una hora antes, esto es, que la estrella pasa á la una.

Si despues de convertir en tiempo todas las ascensiones rectas que hallamos en los catálogos de las estrellas, donde ván señaladas en grados, minutos y segundos de grado, restamos de ellas la ascension recta del sol, tambien convertida en tiempo, para un dia dado, sacarémos la hora del paso de cada una de dichas estrellas para el mismo dia.

769 Sea ♈ el equinoccio de la primavera, que en todas las figuras pondremos al occidente ó á la dere- 306.

 cha;

Fig. cha; *M*, una estrella en el meridiano; ♈*M*, la as-
306. cension recta de la estrella en *M*, contándola de poniente á oriente, ó de la derecha á la izquierda quando estamos de cara al medio dia; ♈☉, la ascension recta del sol; *M*☉, su diferencia, ó la ascension recta de la estrella menos la del sol; esta distancia *M*☉ del sol al meridiano siempre señala la hora, ó el tiempo verdadero (634), y es de 15° á la una del dia, de 30° á las dos &c. La figura está diciendo que para hallar la hora del paso por el meridiano, basta restar la ascension recta del sol para el mismo instante, de la ascension recta de la estrella, la diferencia *M*☉, distancia del sol al meridiano, convertida en tiempo, es la hora que se busca. Para excusar las conversiones de tiempo en grados, y de los grados en tiempo, estilan los Astrónomos usar estas ascensiones rectas del sol y de las estrellas convertidas de antemano en tiempo.

770 Busquemos á qué hora pasó la *lira por el* meridiano el dia primero de Mayo de 1760, contado astronómicamente, esto es, el paso que se siguió al medio dia del dia primero de Mayo en el discurso de 24 horas. Supongamos que la ascension recta aparente aquel dia fuese de 277° 12′ 17″, la qual convertida en tiempo es de 18^h 28′ 49″; la distancia del equinoccio al sol el dia 1 de Mayo á medio dia, ó el complemento de la ascension recta del sol era, segun las efemérides, de 21^h 23′ 51″. Sumo la ascension recta de la lira con la distancia al equinoccio, y saco 39^h 53′; resto de esta suma 24^h que componen un dia entero, y saco 15^h 53′ para la hora que buscamos. En esta primera regla de aproximacion podría haber 4′ de error si la estrella pasase á 23 horas, porque la diferencia de ascension recta se ha tomado para medio dia, y no para 23 horas; y la diferencia de ascension recta dá el tiempo verda-

de-

dero para el instante que la estrella está en el meridiano. Pero la variacion es de muy corta monta en el discurso de algunas horas. Fig.

771 Acerca de este cálculo haremos una prevencion muy importante. Quando decimos que el equinoccio pasó por el meridiano el dia 1 de Mayo á 21^h $24'$, y la lira pasó 18^h $29'$ mas tarde, no se puede inferir que esta estrella pasase el dia 2 de Mayo á 15^h $53'$. Esto sería verdad si todos estos tiempos fuesen tiempos solares verdaderos; pero como este tiempo solar es muy desigual en diferentes meses del año, se convierten las ascensiones rectas en tiempo del primer mobil, y entonces es impropiedad decir que el equinoccio pasaba por el meridiano á 21^h $24'$, y que la lira pasó 18^h $29'$ despues. Hay una diferencia de algunos minutos, pero se simplifica la operacion con calcular la diferencia de las ascensiones rectas para la hora misma en que la estrella está en el meridiano, conforme lo hemos propuesto. Verdad es que entonces suponemos averiguado lo mismo que buscamos, esto es, la hora del paso; pero la suponemos conocida al poco mas ó menos, y la buscamos puntual; y para conocerla al poco mas ó menos, son excusadas las consideraciones hechas, bastando sumar la distancia del equinoccio al sol con la ascension recta de la estrella.

772 Llamamos *ángulo horario* de un astro el ángulo formado en el polo por el meridiano del lugar del observador y el círculo de declinacion que pasa por el mismo astro; es tambien el arco del equador comprehendido entre el meridiano, y el círculo horario del astro; es la distancia del astro al meridiano. Este ángulo horario es indispensable para determinar la altura de un astro para un instante dado, su *azimut* y su *ángulo paraláctico*.

Sea *QEM* el equador; *MCD*, el meridiano; *M*, 307.

 el

Fig. el medio del cielo ; *ME*, el arco del equador que mide el ángulo horario, ó la distancia de una estrella al meridiano, contándola desde un paso por el meridiano al otro, esto es de oriente á poniente hasta 360°. ♈ ⊙ es la ascension recta del sol ; ⊙*M* es el ángulo horario del sol cuya medida es el tiempo verdadero dado ; sumaránse una con otra estas dos cantidades para sacar ♈*M* ascension recta del medio del cielo, de la qual se rebaxará la ascension recta ♈*E* de la estrella, y saldrá el arco *ME*, que mide el ángulo horario de la estrella. De aquí se saca la regla siguiente : *el tiempo verdadero convertido en grados, menos la diferencia de las ascensiones rectas (la del astro menos la del sol) será el ángulo horario del astro, contándole hasta* 24 *horas, y de oriente á poniente.*

773 Quando una estrella, y lo propio diremos de un planeta, está en el orizonte, su distancia al meridiano ó su ángulo horario (772) se llama *arco semidiurno*, y esto es lo primero que se debe determinar para calcular la hora del orto ú ocaso de los astros.

308. Sea *HZO* la mitad del meridiano ; *HO*, la mitad del orizonte ; *EQ*, la mitad del equador ; *P*, el polo; *Z*, el zenit ; *L*, un astro puesto en el orizonte en el instante que nace ; *ZL*, su distancia al zenit que es de 90° ; esto es, su distancia aparente, porque ya hemos visto que la distancia al zenit crece con la paralaxe (732), y mengua con la refraccion (726). *PL* es la distancia verdadera del astro al polo boreal del mundo ; es el complemento de su distancia al equador (620), ó de su declinacion *LA*, si fuere boreal ; pero será la suma de 90° y de esta declinacion, si fuere austral. El arco *PZ* es la distancia del polo al zenit del lugar donde está el calculador, esto es, el complemento de la latitud *ZE* ó de la altu-

tura del polo *PO* (620 y 621). Siendo conocidos Fig.
los tres lados *PL*, *PZ* y *ZL* del triángulo *PZL*, 308.
sacarémos el valor del ángulo *P* (II. 733 *E*). Porque el ángulo *P* ó *ZPL* es el ángulo horario del astro; es su distancia al meridiano en el instante que nace, ó su arco semidiurno; quando el arco semidiurno del sol es de 8^h, es señal cierta de que el sol nace á 4^h de la madrugada. Asimismo para hallar la hora de ponerse el sol, basta conocer el arco semidiurno de por la tarde, y esta es la hora misma de ponerse el sol. Porque quando el sol está en el punto *L* del orizonte, el arco semidiurno *EA* del equador, ó el arco *ML* del paralelo mide el ángulo horario *P*, el mismo ángulo tambien señala el tiempo verdadero, luego el arco mismo semidiurno es el tiempo verdadero de ponerse el sol. Por consiguiente para calcular puntualmente el nacer del sol, basta conocer su declinacion para el instante en que nace, y hacer el lado *ZL* de $90° 32' \frac{1}{2}$, porque la refraccion orizontal hace que el sol parezca $32' \frac{1}{2}$ mas elevado de lo que es.

Por lo que mira á los planetas y las estrellas fixàs, es preciso tener averiguada la hora de su paso por el meridiano (768) igualmente que la declinacion del planeta; y despues de hallado el arco semidiurno, se suma con el paso por el meridiano para sacar la hora del orto ú ocaso del planeta ó de la estrella; se resta para sacar la hora del nacer.

774 En muchos cálculos astronómicos es preciso determinar para un instante dado la altura de un astro sobre el orizonte. Se determina suponiendo conocidas las cantidades siguientes 1.° la distancia del polo al zenit. 2.° la distancia del astro al polo, igual á 90° mas ó menos la declinacion (773); 3.° el ángulo horario que forma en el polo del mundo el meridiano del lugar con el círculo de declinacion que pa-

Fig. pasa por el astro. Este ángulo horario, quando se trata del sol para por la tarde, es igual á la hora dada, convertida en grados á razon de 15° por hora; pero para por la mañana, es su complemento á 12ʰ, convertido tambien en grados. Quando se trata de una estrella, es la ascension recta del sol, menos la de la estrella, sumada con el tiempo verdadero con-
308. vertido en grados (772). Entonces se ha de resolver el triángulo *PZS*, en el qual se conocen dos lados y el ángulo comprehendido; es á saber, el lado *PZ*, complemento de la latitud del lugar (620 y 621), *PS* complemento de la declinacion del astro, y el ángulo *P* que forman estos dos lados, ó el ángulo horario; hallarémos (II. 733 *C*) el lado *ZS* opuesto al ángulo conocido, cuyo complemento para 90°, es la altura *SL* del astro mas arriba del orizonte.

775 El ángulo formado por el vertical y el círculo de declinacion ó círculo horario de un astro, se llama algunas veces *ángulo paraláctico*, porque sirve principalmente para calcular las paralaxes, tal es el ángulo *PSZ*. Se puede hallar resolviendo el triángulo *PZS* con los mismos datos.

En el mismo triángulo *PZS*, dado el ángulo horario *P* y los dos lados adyacentes *PZ* y *PS*, se hallará (II. 733 *C*) el ángulo *PZS* ó el ángulo *HZL*, que es el azimut; es igual al arco *LH* del orizonte comprehendido entre el punto del medio dia *H* y el punto *L* del orizonte adonde el astro corresponde perpendicularmente.

La *amplitud* es el arco del orizonte *QL*, comprehendido entre el verdadero punto de oriente *Q* y el punto donde nace el astro *L*. Esta amplitud se halla del mismo modo que el azimut, porque es la diferencia ó la suma de 90°, y del azimut de un astro que está en el orizonte.

De

Fig. 309.

De la aberracion de las Estrellas.

776 La *aberracion* de las estrellas es un movimiento aparente con el qual parece que andan elipses de 40″ de diámetro; proviene del movimiento de la luz, combinado con el movimiento anuo de la tierra.

Sea *E* una estrella que arroja ácia nosotros un rayo de luz, considerándole como un corpúsculo que vá desde *E* á *B*; sea *AB* un arco muy chico de la órbita de la tierra, que por lo que se verá dentro de poco supondremos de 20″; *CB* el espacio que el rayo ha andado mientras que la tierra andaba *AB*. Luego el corpúsculo de luz estaba en *C* (22) quando la tierra estaba en *A*; y llega al punto *B* en el mismo instante que la tierra; con esto *CB* y *AB* expresan las velocidades de la luz y de la tierra en 20″ de tiempo.

777 Tirarémos la linea *CD* igual y paralela á *AB*, y concluiremos el paralelógramo *DBAC*. Podemos considerar (22) la velocidad *CB* de la luz como derivada de dos velocidades cuyas direcciones son *CD* y *CA*. Por ser la velocidad *CD* la misma en direccion y cantidad que la velocidad *AB* de la tierra, nó la podemos percibir, y es nula para nosotros; el ojo no puede ver con un rayo que camina en la misma direccion y velocidad que él. Así, para nosotros solo subsistirá la parte *CA* de la velocidad de la luz; el rayo herirá nuestra vista en la direccion *CA*, y verémos la estrella en la direccion *AC*, ó *BD* paralela con ella. El ángulo *CBD* se llama la *aberracion*; es la cantidad ó el ángulo *CBD* que una estrella parece que se aparta de su verdadero sitio, ó de la linea *BCE*, cuya apariencia proviene del movimiento de la tierra y del de la luz.

El

Fig. 309. 778 El plano *ECBA* que vá desde la linea *AB* que traza la tierra hasta la estrella *E*, se llama *plano de aberracion*, porque es el plano en el qual sucede la aberracion. El lugar aparente de la estrella, su lugar verdadero, el ojo del observador, y el espacio que anda en 8′ de tiempo, se hallan todos juntos en este plano, de suerte que no puede hacer la aberracion que la estrella parezca en otro plano. Al triángulo *CBA* que forma el camino de la luz con el de la tierra, y cuyo angulillo *C* mide la aberracion, se le llama *triángulo de aberracion*.

779 Se sabe (363), y lo confirmarémos á su tiempo, que la luz del sol gasta 8′ en venir desde el sol á la tierra; y como la tierra anda 1° de su órbita en un dia ó 24 horas, esto es, 3600″ de grado en 1440′ de tiempo, sacarémos con hacer una regla de tres que anda 20″ de su órbita en 8′ de tiempo. De donde se sigue que la velocidad de la tierra es á la de la luz como 1 á 10313. Porque siendo (II. 638) la longitud del radio de la órbita terrestre, ó la distancia del sol á la tierra de 57° 17′ 44″, ó 206264″ hallarémos que la longitud de un arco de 20″ de la órbita terrestre es igual á $\frac{20}{206264}$, cuya razon es la misma que la de 1 á 10313; y como las velocidades son como los espacios quando los tiempos son iguales (13), será con efecto la velocidad de la tierra 10313 menor que la de la luz.

780 De lo dicho (777) resulta que una estrella siempre nos parece mas adelantada del lado ácia el qual caminamos, toda la cantidad del ángulo *BCA*. Pende este ángulo de la razon que hay entre la velocidad *AB* de la tierra, y la velocidad *CB* de la luz, cuya razon es la de 1 á 10313 (779); de aquí se saca un ángulo de 20″ quando *CB* es perpendicular á *AB*. Luego la aberracion siempre será de 20″ quando el rumbo del ojo fuere perpendicular al rayo de la es-

estrella. Pero quando CB está inclinada al rumbo AB Fig. del ojo, el ángulo ACB de aberracion es menor; y 310. como CB es á AB, como el seno del ángulo A es al seno del ángulo C, síguese que el seno del arco de aberracion, ó la aberracion misma, es como el seno de la inclinacion del rayo CA al rumbo del ojo, que siempre es un arco pequeño de la órbita terrestre; quiero decir, que es igual á 20″ multiplicados por el seno del ángulo qué forma el rumbo del ojo con el rayo de la luz. Finalmente, si la linea CA se inclinara hasta confundirse con la linea ABD, el ángulo C se desaparecería, y no habria mas aberracion.

781 Supongamos ahora que el ojo, en vez de caminar de A á B, camine desde B á A, de modo que el rayo llegue á A al mismo tiempo que el ojo. Si resolvemos la velocidad CA en las dos CE y CB, la velocidad BA de la tierra destruirá la velocidad CE, y no quedará mas que CB ó su paralela EA. Parecerá, pues, en este caso que la estrella sube mas arriba de la linea que el ojo anda, siendo así que en el caso antecedente parecia qué baxaba. La veremos en E, y no en C; porque la aberracion siempre lleva una estrella del mismo lado al qual se encamina la tierra. Quando la tierra se halla en el punto G de su órbita 311. GHD, y despues en el punto K, parece que sigue dos rumbos opuestos; en el primer caso la estrella está en oposicion, y parece á la izquierda del lugar medio. En el segundo caso, caminando la tierra de D á K, la estrella está en conjuncion con el sol, y parece 20″ á la derecha, esto es, al occidente del punto E en una linea DS.

782 El efecto de la aberracion en una estrella puesta en el polo mismo de la eclíptica, es el mas reparable de todos, y por este motivo le considerarémos el primero, probando que la estrella parecería andar en un circulillo de 40″ de diámetro al rede-

Fig. dedor de su lugar verdadero, esto es, al rededor del
312. polo de la eclíptica. Sea *ABCD* la eclíptica ó la órbita terrestre que suponemos circular, porque para el caso es despreciable la diferencia de sus diámetros; *E*, el polo de la eclíptica, y es preciso figurársele levantado perpendicularmente al plano de la figura; al rededor del polo *E* se trazará un circulillo cuyo diámetro sea de 40″. Quando la tierra estuviere en *A*, y caminare desde *A* á *B*, la estrella situada en el polo de la eclíptica parecerá 20″ mas adelantada del mismo lado, esto es, en *a* (780); quando la tierra estuviere en *B*, la estrella parecerá en *b*, despues en *c*, *d*, y al cabo de un año habrá andado el circulillo *abcd* al rededor del polo de la eclíptica, estando siempre 90° mas adelantada en su circulillo que la tierra en el suyo, y teniendo siempre 20″ mas de longitud que en su verdadero lugar.

311. 783 Por lo que mira á las estrellas que están en el plano de la eclíptica, sea *GHK* el plano de la órbita terrestre; *E*, una estrella situada en el mismo plano; *S*, el sol; *G*, el punto donde se halla la tierra quando la estrella está en oposicion; *K*, el punto donde se halla la tierra quando la estrella está en conjuncion con el sol. Como en la oposicion *G* la tierra camina de *B* á *G*, ó de occidente á oriente, la estrella parecerá 20″ mas adelantada ácia el oriente; quiero decir, que su longitud crecerá 20″; pero como en la conjuncion la tierra camina en una direccion contraria, respecto de la estrella, esto es, de *D* á *K*, la longitud de la estrella será 20″ menor. En las quadraturas *Q* y *H*, la aberracion será nula, porque el rayo *HI*, que se dirige á la estrella, y es paralelo á *SE*, por razon de la inmensa distancia de las estrellas, llega á ser la tangente de la órbita que anda el ojo, y se confunde con ella en *H*, de donde resulta que no hay mas aberracion (780).

Quan-

784 Quando la tierra anda el arco *FL*, la aberracion mengua, porque solo pende la aberracion del valor de la perpendicular *LN*, cuya linea *LN* es menor que *LF* en la misma razon que el coseno del arco *GL* es menor que el radio, ó *SV* menor que *SL*, porque los triángulos semejantes *LFN*, *SVL* dán *LF* : *LN* :: *SL* : *SV*. Por consiguiente, la aberracion en longitud que pende del movimiento *BG* ó *NL* de la tierra perpendicularmente al rayo tirado á la estrella, es proporcional al seno de la distancia al punto donde es nula, esto es, al punto *H* de la quadratura. Por la misma razon la aberracion en latitud pende del movimiento de la tierra en la direccion perpendicular á la primera, esto es, del movimiento *FN*, y es proporcional al seno de la distancia *GL* ó á la linea *LV*; porque los mismos triángulos semejantes *LFN*, *LVS* dan *LF* : *FN* :: *SL* : *LV*. Fig. 311.

Si la estrella estuviere entre la eclíptica y su polo, y se la viera con un rayo oblicuo, el efecto de la aberracion en la direccion perpendicular á la eclíptica menguará como el seno de la oblicuidad (780); pero será siempre la misma en la direccion paralela á la eclíptica, y por lo mismo el círculo de aberracion se transformará en elipse.

De la Nutacion.

785 La *nutacion* ó *deviacion* es un movimiento aparente de 9″ observado en las estrellas fixas, cuyo periodo es de 18 años.

786 Para que se entienda mejor lo poco que acerca de este punto vamos á declarar, es de saber, y lo probaremos en el tomo IV, que todos los planetas se atrahen unos á otros, siendo mayor el efecto de esta atraccion, con tal que no varíen las demas circunstancias, quando el planeta atrahido está mas cerca del planeta atrahente.

El

Fig. 787 El influxo que, segun consta de las observaciones, tiene la proximidad de la luna respecto de la tierra en la deviacion, nos obliga tambien á prevenir, conforme se verá mas adelante, que la órbita en que se mueve la luna al rededor de la tierra corta la eclíptica en dos puntos y forma con ella un ángulo de 5°. Los dos puntos de esta interseccion se llaman los *nudos de la luna*, llamándose *nudo ascendiente* el punto donde la luna atraviesa la eclíptica para acercarse al norte. Muévense los nudos de la luna al rededor de la eclíptica con un movimiento retrogrado que dura 19 años, hallándose al cabo de este tiempo el nudo ascendiente en el mismo punto de la eclíptica donde estaba quando empezó este período.

788 Una vez que la órbita lunar forma con la eclíptica un ángulo de 5°, la mayor latitud de la luna no puede pasar de 5°. Por consiguiente, como la mayor distancia de la eclíptica al equador es (*607*) de 23° $\frac{1}{2}$, quando el nudo ascendiente estuviere en el equinoccio de la primavera, la luna se apartará del equador en su mayor digresion, 28° $\frac{1}{2}$. Pero quando el nudo ascendiente estuviere en el equinoccio del otoño, la luna en su mayor latitud estará entre la eclíptica, y el equador 5° lexos del primer círculo, y por consiguiente á la distancia de 18° $\frac{1}{2}$ del equador.

789 Observó *Bradley* en 1728 que la declinacion de las estrellas inmediatas al coluro de los equinoccios padecia una variacion mayor de la que correspondia á la precesion de los equinoccios de 50″, calculada por el método comun; observó tambien que en general las estrellas inmediatas al coluro de los equinoccios padecian en su declinacion una alteracion 2″ mayor de lo que habia de seguirse de la precesion, y las estrellas inmediatas al coluro de los solsticios 2″ me-

nos.

nos. Reparó que cada año los periodos de la aberracion iban ajustados á las reglas dadas; pero de un año para otro habia otras diferencias; las estrellas situadas entre el equinoccio de la primavera y el solsticio de invierno se hallaban mas cerca del polo boreal, y las estrellas opuestas se habian apartado, Malició que la atraccion de la luna en el equador de la tierra podia ocasionar un balance en el exe de la tierra. Fig.

790 En 1727 el nudo ascendiente de la luna coincidió con el equinoccio de la primavera, y en 1736 coincidió con el equinoccio de libra; la alteracion que padeció la declinacion de las estrellas inmediatas al coluro de los equinoccios le daba á entender que la precesion habia sido mayor de lo que correspondia (789), y no obstante eso las estrellas inmediatas al coluro de los solsticios parecia que se movian de un modo opuesto á los efectos de este exceso.

En 1732 el nudo de la luna habia retrocedido hasta el solsticio de invierno; y entonces pareció que las estrellas inmediatas al coluro de los equinoccios variaban su declinacion segun correspondia á la precesion de 50". Los años siguientes esta variacion fué menguando, hasta 1736 que el nudo ascendiente llegó al equinoccio de libra.

Las estrellas inmediatas al coluro de los solsticios experimentaron desde 1727 hasta 1736 una variacion en su declinacion 18" menor de lo que correspondia á la precesion de 50"; por manera que el polo del mundo pareció que habia padecido una nutacion de 18" en el discurso de una media revolucion de los nudos de la luna.

791 Creyó *Machin*, Secretario de la Sociedad de Londres, que para explicar la nutacion y las variaciones de la precesion, bastaba suponer que el polo de la tierra trazaba un circulillo de 18" de diámetro, y que le andaba en el discurso de la revolucion que

Brad-

Fig. *Bradley* observó, y que era la de los nudos de la luna.

313. 792 Sea *E* el polo de la eclíptica; *P*, el polo del equador, que dista del primero 23° ½, y al rededor del punto *P* un circulillo cuyo radio *PB*=9″. En lugar del punto *P*, lugar medio del polo, se supone que el polo verdadero anda un círculo *ABCD*, que esté en *A* quando el nudo de la luna está en el equinoccio de la primavera, ó en el coluro de los equinoccios *P*♈, y que prosigue moviéndose de *A* á *B* del mismo modo que el nudo; por manera que quando el polo del mundo está en *O*, el arco *AO* tenga los mismos grados que la longitud del nudo de la luna. El lugar del polo verdadero siempre estará 3 signos mas adelantado (782) en ascension recta en el círculo *ABC* que el lugar del nudo de la luna en la eclíptica, y el polo estará en *D* quando el nudo estará en ♋. Ya que el polo retrocede de *A* á *B*, es preciso se acerque á las estrellas que están en el coluro *PB*♈ de los equinoccios; por manera que la precesion parecerá mayor, causando en las estrellas que están en el coluro de los equinoccios, una variacion de declinacion 9″ mayor de lo que corresponde, en el discurso de 4 años y 8 meses que gastará el nudo en ir desde aries á capricornio, y el polo en venir de *A* á *B*; al mismo tiempo parecerá que el polo se habrá acercado á las estrellas que están ácia el solsticio de invierno ó ácia *E*.

793 El primer efecto general de la nutacion, el mas facil de percibirse, es la variacion de la oblicuidad de la eclíptica. Este ángulo crece 9″ quando el nudo ascendiente de la luna está en aries; porque entonces el polo está en *A*, y la distancia de los polos *EA* es 9″ mayor que quando el nudo está en libra.

Quando el polo de la tierra llega de *A* á *O*, la obli-

oblicuidad de la eclíptica es *EO* ó *EH*, y la nutacion Fig.
es igual á *HP*; el arco *AO* ó el ángulo *APO* es igual 313.
á la longitud del nudo, y *PH* es su coseno. Pero *PH* $= 9''$ sen *OB* ó $9''$ cos *AO* (565), luego la nutacion *PH* $= + 9''$ cos nudo, ó $9''$ multiplicados por el coseno de la longitud del nudo de la luna. Esta nutacion es sustractiva, ó se debe restar quando el nudo de la luna está entre 3 y 9 signos, es aditiva en el primero y quarto quadrante de la longitud del nudo.

De la paralaxe, magnitud y distancia de las Estrellas.

794 Todo quanto se observa en los planetas desde la tierra debe reducirse al sol que es el centro de sus movimientos. Como estamos á mucha distancia de este astro, no vemos desde la tierra los planetas en el mismo lugar donde los veríamos si estuviésemos en el sol, y la longitud que desde la tierra observamos acerca de un planeta, siempre ó casi siempre es distinta de la que observaríamos desde el sol.

795 La diferencia que hay entre estas dos longitudes se llama la *paralaxe de la grande órbita*, la *pa-* 314.
ralaxe anua. Para darla á entender, sea *S* el sol; *L*, 315.
el lugar de un planeta en la eclíptica, y *T* la tierra en su órbita *TNR*; el ángulo *TLS* que forma la distancia *SL* del planeta al sol, con la linea *TL* tirada desde la tierra al lugar *L* del planeta trasladado á la eclíptica, se llama la *paralaxe anua*, ó la *paralaxe de la grande órbita*. Este ángulo *TLS* es la diferencia que vá de la longitud del planeta observado desde el sol, á la longitud del mismo planeta observado desde la tierra. Porque si tiramos la linea *SF* paralela á *TL*, aquella señalará en el cielo la misma longitud que la linea *TL* (722), esto es, la longitud del planeta *L* observada desde la tierra; pero el ángulo *LSF* $=$ *SLT*, es la diferencia entre la longitud

Fig. que señala *SF*, y la longitud observada desde el sol, 314. la misma que señala *LS*; luego el ángulo *SLT* ó la 315. paralaxe anua es la diferencia que vá de la longitud observada desde la tierra, á la que hallaríamos si la observáramos desde el sol.

796 La paralaxe anua se verificaría en las estrellas si no estuviesen á tanta distancia de nosotros.

316. Sea *S* el sol; *AB*, el diámetro de la grande órbita que la tierra anda en el discurso de un año; *A*, el punto donde se halla la tierra el dia 1 de Enero; *B*, el punto donde se halla el dia 1 de Julio; *E*, una estrella que vemos por el rayo *AE*. Como la linea *AB* está en el plano de la eclíptica, si nos figuramos la órbita terrestre perpendicular al plano de la figura, de modo que no veamos mas que su grueso, el ángulo *EAB* será la latitud de la estrella. Pero llegada que sea la tierra á *B*, estando la estrella en oposicion respecto del sol, la veremos por el rayo *BE*, y su latitud aparente será el ángulo *EBC*. Esta latitud *EBC* es mayor que la primera, y la diferencia que vá de una á otra es el ángulo *AEB*. Finalmente, el ángulo *AES* que es sensiblemente la mitad de *AEB*, por ser *AB* extremadamente pequeña en comparacion de la distancia á la estrella, es la paralaxe anua en latitud.

797 Si la distancia *SE* de la estrella fixa fuese doscientas mil veces mayor que la distancia *SA* del sol á la tierra, el ángulo *AES* será de 1″, y la latitud *EAS* de una estrella en conjuncion será 2″ menor que la latitud *EBC* de la estrella observada en su oposicion, suponiendo que la latitud de la estrella sea con corta diferencia de 90°. Para que la latitud de las estrellas parezca una misma en todos los tiempos del año, á pesar del movimiento de la tierra, es preciso que la distancia de las estrellas sea tan grande, que la órbita de la tierra no tenga con ella nin-

gu-

guna razon sensible, y sea el ángulo *AES* como infinitamente pequeño. Fig. 316.

798 El descubrimiento de la aberracion ha hecho patente que las desigualdades observadas en las estrellas proceden de una causa distinta de la paralaxe, y la precesion explica tan bien todas las observaciones, que excluye totalmente la paralaxe. *No tienen*, pues, *las estrellas fixas paralaxe alguna*; y así lo sienten hoy dia los Astrónomos de todas las naciones.

799 Si la paralaxe de las estrellas fixas fuese reparable, nos proporcionaría determinar á que distancia están de la tierra. Si la paralaxe absoluta de una estrella ó el ángulo *APS* fuese de 1″, el lado *PS* sería 206264 veces mayor que el radio *AS* de la órbita anua, cuyo radio es, conforme diremos á su tiempo, de 34 millones de leguas. En la distancia media del sol *AS*, cabe 22198 veces el semidiámetro de la tierra; luego si la paralaxe anua de una estrella fuese de 1″ no mas, su distancia sería 4727200000, ó 4727 millones de veces mayor que el radio de la tierra, esto es, de 6771770 millones de leguas.

800 Si por medio de este radio se calcula la circunferencia del círculo que andarían las estrellas cada dia, en el supuesto de ser inmobil la tierra, siendo de $23^h\ 56'\ 4''$ la revolucion diaria (638); se inferirá que las estrellas andarian por lo menos 49392000 leguas por segundo; siendo así que mediante la rotacion de la tierra, basta con una velocidad de 555 varas por segundo.

801 Por estar á tanta distancia de nosotros las estrellas, no es posible determinar su diámetro. No parecen sino como puntos tanto mas chicos quanto mas perfectos son los anteojos con que las observamos.

Fig.

DEL SOL.

802 La teórica del sol en los mas de sus puntos no se distingue en realidad de la teórica de la tierra, pues el movimiento propio aparente del sol es efecto del movimiento de la tierra. Sin embargo algunos puntos hay que se pueden tratar separadamente.

Del movimiento del sol.

803 Una vez determinada la latitud del lugar del observador (619), la direccion de la eclíptica (607), los puntos donde esta corta el equador (603), y el ángulo que forman uno con otro estos dos círculos, ó quanto se aparta el sol del equador en los puntos solsticiales (607), será facil de señalar el camino del sol en la eclíptica, y los puntos donde se halla cada dia.

317. Sea *EQ* el equador; *OH*, el orizonte; *ES*, la eclíptica que forma en *E* un ángulo de 23° ½ con el equador; *S*, el sol á las 12 del dia en el instante que pasa por el meridiano *SAB*. Si medimos su altura respecto del orizonte (590) ó el arco *SB*, y de su altura restamos la altura *AB* del equador, que es constante, conoceremos *SA*, distancia del sol al equador, llamada la *declinacion del sol* (755). Pero en el triángulo esférico *SEA*, conocemos el ángulo *E* de 23° ½, el lado opuesto *SA*, declinacion del sol, y el ángulo recto *A*, por ser los meridianos perpendiculares al equador (588); luego sacaremos la hypotenusa *ES*, la qual será la longitud del sol, esto es, su distancia al punto equinoccial *E*, medida á lo largo de la eclíptica. Por lo probado (II. 733 *B*), diremos: *El seno del ángulo* E *ó de la oblicuidad de la eclíptica es al seno de la declinacion observada* AS, *como el radio es al seno de la hypotenusa* ES, *ó de la longitud del sol.*

Si

298

299

302

303

306

307

308

309

310

315

Si la declinacion del sol observada en Marzo, fuese de 0° 53′ 57″, la oblicuidad de la eclíptica de 23° 28′ 11″, sacaríamos $ES = 2° 14′ 47″$. Fig. 317.

804 El lado ES hallado por medio de esta proporcion es la distancia al equinoccio mas inmediato E. Si la observacion se hiciese quando el sol se vá acercando al equador, y vá menguando su declinacion, el resultado de la operacion sería la distancia al equinoccio de otoño medida á lo largo de la eclíptica.

Sea ♈DB♎F♈ el equador reducido á linea recta; ♈H♎♑♈, la eclíptica, cuya primera mitad ♈H♎, por estar ácia arriba, ó al norte del equador, tiene una declinacion boreal, siendo así que los seis últimos signos ♎♑♈ tienen una declinacion austral. Si el sol estuviera en G con una declinacion BG, por la regla antecedente hubiéramos sacado la hypotenusa G♎, y su suplemento para seis signos ♈SHG sería la longitud del sol. Si la declinacion del sol fuese austral, como AF, su altura sería menor que la del equador, por lo menos en nuestras regiones septentrionales; se debería restar la altura observada de la del equador para sacar la declinacion. La hypotenusa hallada por la analogía precedente sería ♎A distancia al equinoccio de otoño, y se le habian de añadir 180° ó todo el semicírculo ♈H♎ para sacar la longitud del sol contada desde el equinoccio de la primavera, ó desde aries, esto es, el arco ♈H♎A. 318.

Finalmente, si la declinacion siendo tambien austral, estuviese como PQ, entre el solsticio de invierno ♑ y el equinoccio de la primavera ♈, por la re-

Fig. regla dada solo sacaríamos la hypotenusa P♈, y se debería tomar su suplemento para 12 signos ó 360° para sacar la longitud entera ♈SHGAP contándola de occidente á oriente, desde el punto por donde se empezaron á contar las longitudes.

805 Dexamos dicho (632) que si se dividen 360° ó 1296000″ en $365\frac{1}{4}$ partes se saca que le toca andar al sol 59′ 8″ 3 cada dia. Por consiguiente con tomar las veces que sea menester esta cantidad, se determinaría de quantos grados y minutos ha de ser la longitud del sol, en el supuesto de que crezca regular y uniformemente, esto es, una misma cantidad cada dia. La longitud que se saca para cada dia, sumando succesivamente el movimiento diurno 59′ 8″, se llamará de aquí en adelante *longitud media.*

806 Despues que los Astrónomos hubieron observado un año de seguida, siguiendo el método propuesto (803), el lugar verdadero del sol en la eclíptica todos los dias á medio dia, echaron de ver que la longitud verdadera observada no siempre era igual con la longitud media calculada de antemano para cada dia. La longitud verdadera del sol solo es igual con la longitud media ácia principios de Enero y Julio; es 2° ó 1° 55′ 31″ mayor por Abril, quiero decir que el dia 1 de Abril el sol está en el punto donde debería hallarse el dia 3, si hubiese caminado uniformemente en la eclíptica desde el dia 1 de Enero, y si su longitud media fuese siempre igual con su longitud verdadera. Al contrario, ácia principios de Octubre, la longitud verdadera está atrasada la misma cantidad respecto de la longitud media. Esta desigualdad del sol se llama *equacion de la órbita*, ó *equacion del centro.*

Por *equacion* entienden generalmente los Astrónomos *la diferencia que vá de una cantidad actual al valor*

lor que debería tener la misma cantidad si creciera siempre uniformemente y sin desigualdad alguna. Fig.

Lo primero que les ocurrió á los antiguos Astrónomos fué que esta desigualdad no era mas que aparente. Creian que el sol habia de andar un círculo, por ser esta la mas perfecta de todas las figuras, y que le habia de andar con movimiento uniforme por ser este el mas perfecto de todos los movimientos. Pero si la tierra donde nosotros estamos no ocupa el centro de este círculo, las partes del círculo mas apartadas de nosotros parecerán menores que las mas cercanas, y el movimiento del sol nos parecerá mas lento en las partes mas distantes. Sea *E* el centro del círculo *NAPB* que anda el sol cada año, y *F* otro punto donde esté la tierra. Quando el sol es- 319. tuviere en *N*, estará mas lexos de nosotros que quando estuviere en *P*, los espacios que anduviere cada dia nos parecerán menores, y el sol gastará mas tiempo en andar la parte *BA* que la parte *CD*, bien que cada una nos parezca de 90°, pues miden ángulos rectos *BFA*, *CFD*.

Si por el centro *E* se tiran las lineas *GE*, *HE*, las quales tambien forman ángulos rectos, echarémos de ver que la quarta parte de la revolucion media se acaba de *G* á *H*, bien que la quarta parte de la revolucion verdadera no se verifique sino de *A* á *B*, los arcos *BH* y *AG* señalan la desigualdad del sol.

807. El punto *N* de la grande órbita, el que mas lexos está de la tierra, se llama el *apogeo*, y el punto *P* que está mas cerca de nosotros, se llama el *perigeo*; la cantidad *EF*, ó la distancia entre el centro de la órbita y el punto donde se supone que está el observador, se llama la *excentricidad del sol*; la distancia del sol á su apogeo se llama la *anomalía*, y es v. gr. el arco *AN* quando el sol está en *A*. Como es la tierra la que anda al rededor del sol en la órbi-

 ta

Fig. ta donde nos parece que el sol se mueve, llamamos
319. *afelio* el punto *N* donde la tierra está mas distante del sol *F*. y *perihelio* el punto *P* donde está mas cerca. Llámanse tambien *apsides* los dos puntos extremos *N* y *P* de una órbita.

808 La altura meridiana del sol que sirvió (803) para hallar su longitud, tambien puede servir para hallar su ascension recta. Porque en conociendo la
317. declinacion *AS*, se puede sacar (II. 718 *B*) por medio del triángulo *SEA*, en el qual conocemos tres cosas, el lado *AE*, distancia del sol al equinoccio contándola en el equador, y el ángulo *S* que forma la eclíptica *ES* con el círculo de declinacion *SA*; el complemento de este último ángulo es el ángulo del círculo de latitud, y del círculo de inclinacion, llamado *ángulo de posicion.*

809 Quándo se conoce todos los dias ó la longitud ó la ascension recta del sol, es facil de determinar el dia y la hora del equinoccio, esto es, el dia en que es cero la longitud del sol, y lo son tambien su ascension recta y su declinacion.

810 La duracion del año es tambien una consecuencia de la determinacion de los equinoccios, porque el intervalo entre un equinoccio y el del año siguiente es la duracion del año solar. Si se toman dos equinoccios observados mil años uno despues de otro, y se divide el intervalo total en mil partes, se sacará con mas puntualidad la duracion del año. Por este método se ha sacado que el año dura $365^d\ 5^h\ 48'\ 45''$.

811 El año que acabamos de determinar se llama *año trópico*. Hay otro año que se llama *año sideral*, y es el regreso del sol á unas mismas estrellas. El año sideral es algo mas largo que el año trópico, porque como las estrellas se apartan 50″ cada año del equinoccio (766), y necesita el sol 20′ para andar estos 50″ de arco, síguese que el año sideral dura 20′

mas

mas que el año trópico. Por consiguiente el año sideral es de $365^d\ 6^h\ 9'\ 11''$. Fig.

Del método de las alturas correspondientes.

812 La ascension recta del sol sacada por el método propuesto (808), sirve para determinar la de las estrellas, y formar los catálogos. Porque para conocer la longitud de una estrella, es preciso compararla con el sol, cuya ascension recta se puede determinar cada dia (808). Queda, pues, reducida la cuestion á determinar la ascension recta del sol; este es el término fixo que la naturaleza misma señala, y al qual todo debe referirse. Las longitudes se cuentan (758) desde un punto que el sol nos dá á conocer, y es la interseccion del camino del sol con el equador; este punto no está señalado en el cielo, el sol nos enseña donde está.

813 Es por lo mismo la diferencia de ascension recta el fundamento del método por el qual se determinan los lugares del sol y de las estrellas; es, pues, preciso que declaremos el método mas natural y seguro que se conoce para hallar estas diferencias de ascension recta.

Ya hemos dado á entender (626) que los astros están á igual altura una hora antes de pasar por el meridiano y una hora despues; por consiguiente para determinar puntualmente el instante del paso de un astro por el meridiano, basta observar con un relox de péndola, el instante en que se halló á cierta altura ácia el oriente al subir antes de llegar al meridiano, y observar despues el instante en que se halla á la misma altura baxando ácia poniente despues de su paso por el meridiano. El medio entre estos dos instantes tomándole por el relox sera el tiempo que señalaba el relox quando el astro estuvo en el meridiano.

Su-

Fig. 298. 814 Supongámos que observando por la mañana el sol se halle que estaba á 21° de altura quando el relox señalaba 8^h 50′ 10″; supongamos que muchas horas despues, y mas allá del meridiano, hayamos hallado que tenia 21° de altura ácia el poniente quando el relox señalaba 2^h 50′ 30″; hemos de determinar quanto tiempo ha corrido desde 8^h 50′ 10″ de la mañana, hasta 2^h 50′ 30″ de la tarde. Tomarémos el medio de este intervalo, y este será el instante del medio dia en dicho relox, estuviese puesto ó no á la hora.

815 Para determinar el medio entre estos dos instantes, se tomará la mitad de su suma; pero en lugar de 2 horas despues de medio dia, se contarán 14 horas, porque se debe suponer que el relox señaló de seguida las horas por el orden natural desde 8 horas hasta 14, siendo así que en la realidad, y por su construccion, acabó á las 12 para empezar otra vez 1, 2 &c. Esta irregularidad del relox turbaría el cálculo. Practicando esta regla sacaríamos que quando el sol estaba en el meridiano á su mayor altura, y á distancias iguales de las dos alturas observadas, el relox señalaba 11^h 50′ 20″, y por lo mismo atrasaba respecto del sol 9′ 40″. A los Astrónomos no les dá cuidado que sus reloxes adelanten ó atrasen, con tal que sepan quanto atrasan ó adelantan, conforme se lo dá á conocer el método propuesto.

816 Supone esta operacion que el sol ande por mañana y tarde un solo y mismo paralelo, que su arco ascendiente sea de todo punto igual á su arco descendiente, quiero decir, que desde las nueve de la mañana hasta las tres de la tarde se haya mantenido en un mismo paralelo, á fin de que su ángulo horario (722) fuese el mismo á la misma altura. Pero este supuesto no se verifica, porque como el sol anda cada dia oblicuamente en la eclíptica un arco de

de 1°, se acerca ó aparta por precision algun tanto Fig. del equador.

817 Hemos manifestado como el arco diurno del paralelo que anda un astro en la esfera oblicua, es tanto mayor quanto el astro está mas próximo al polo (661) elevado, esto es, mas septentrional respecto de nosotros; lo propio sucede con el arco *semidiurno*, con el arco del paralelo comprehendido entre el orizonte y el meridiano. Si quando el sol se pone está mas próximo al polo que quando nació, el arco semidiurno de por la tarde es mayor que el de por la mañana, quiero decir que corrió mas tiempo desde medio dia hasta que se puso, que desde que nació hasta medio dia. Por consiguiente el medio dia verdadero no estuvo á la misma distancia del nacer que del ocaso, y por lo mismo no basta tomar el punto medio entre el orto y ocaso del sol, para determinar el instante del medio dia. Con tomar este punto medio, haríamos lo mismo que si sumáramos uno con otro los dos arcos semidiurnos expresados en tiempo, y tomáramos la mitad de la suma, conforme lo hemos practicado (815). Pero si uno de los dos números fuese, v. gr. 40″ mayor que el otro, la semisuma será 20″ mayor que el primer número, y el resultado tendrá 20″ de mas. Por consiguiente para sacar el punto fixo del medio dia se deberian rebaxar 20″ de dicha semisuma. El medio tomado entre los dos instantes dista igualmente del orto que del ocaso, pues se tomó puntualmente el punto medio; pero el meridiano está mas cerca del sol naciente, luego el sol llegó al meridiano antes que el punto que está en medio del nacer y ponerse, luego se debe rebaxar algo de este punto medio para sacar el instante del medio dia.

818 Lo que acabamos de decir del orto y ocaso del sol, se aplica á una altura qualquiera, pongo

por

Fig. por caso de un círculo paralelo al orizonte que estuviese á 21° de altura. Estos círculos se llaman *almicantarates*.

819 Manifestemos ahora como se halla la correccion que necesita la determinacion del medio dia
320. por el método propuesto. Sea *P* el polo elevado; *Z*, el zenit; *S*, el sol; *ASBC*, un círculo paralelo al orizonte, de modo que el punto *S* y el punto *B* estén á la misma altura; *PS*, la distancia del sol al polo por la mañana; *PB*, su distancia al polo por la tarde, menor que la primera. En el instante que el sol llegare al punto *B* por la tarde, que suponemos á 21° de altura, como en la observacion de por la mañana, el ángulo horario de por la tarde *ZPB*, ó la distancia del sol y de su círculo horario *PB* al meridiano *PZA*, será mayor que el ángulo horario de por la mañana *ZPS*. Tenemos, pues, dos triángulos *ZPS*, *ZPB*, que tienen el lado *PZ* comun, y los lados iguales *ZS*, *ZB* de 69° cada uno, por ser el complemento de la altura 21°. Los lados *PS* y *PB* discrepan la cantidad que ha variado la declinacion del sol en el intervalo de una observacion á otra. Si resolvemos (II. 733 *E*) separadamente estos dos triángulos, para sacar los dos ángulos horarios *ZPS*, *ZPB*, conocerémos su diferencia cuya mitad convertida en tiempo á razon de 15° por hora (634), será la correccion que se deberá hacer al instante medio entre las dos observaciones para sacar el medio dia verdadero.

820 Como todas las observaciones del sol se reducen al centro del mismo astro, bien que se hacen en su limbo, es preciso saber quanto tiempo gasta el sol en atravesar el meridiano, y lo manifiesta la tabla siguiente.

Ta-

Fig.

Tabla del tiempo que el semidiámetro del sol gasta en atravesar el meridiano en diferentes tiempos del año, señalado en minutos, segundos y décimas de segundo.

Dias.	Enero.	Febrero.	Marzo.	Abril.	Mayo.	Junio.
1′	1′ 10″ 8	1′ 8″ 0	1′ 5″ 2	1′ 4″ 3	1′ 5″ 8	1′ 8″ 2
7	1 10, 5	1 7, 3	1 4, 8	1 4, 4	1 6, 3	1 8, 5
13	1 10, 0	1 6, 6	1 4, 5	1 4, 7	1 6, 8	1 8, 6
19	1 9, 4	1 6, 0	1 4, 3	1 5, 0	1 7, 3	1 8, 7
25	1 8, 8	1 5, 5	1 4, 2	1 5, 4	1 7, 7	1 8, 7
	Julio.	Agosto.	Sept.bre	Oct.bre	Nov.bre	Dic.bre
1	1′ 8″ 5	1′ 6″ 4	1′ 4″ 2	1′ 4″ 2	1′ 6″ 8	1′ 10″ 1
7	1 8, 3	1 5, 9	1 4, 0	1 4, 5	1 7, 5	1 10, 6
13	1 7, 9	1 5, 4	1 4, 0	1 4, 9	1 8, 2	1 10, 9
19	1 7, 5	1 5, 0	1 3, 9	1 5, 4	1 8, 9	1 11, 0
25	1 7, 8	1 4, 6	1 4, 0	1 6, 0	1 9, 5	1 11, 0

Hallar el tiempo verdadero de una observacion.

821 El que sepa como se determina el instante verdadero del medio dia, hallará facilmente la hora verdadera de una observacion qualquiera. Supongo que por el método propuesto (817) se sabe que un relox señalaba el dia 1 de Enero á medio dia $0^h\ 3'\ 57''$, y que al dia siguiente ó el dia 2 de Enero se haya hallado por el mismo método que el relox señalaba $0^h\ 4'\ 45''$ á medio dia, esto es, $48''$ mas que el dia antes; se echará de ver que el relox adelantaba $48''$ cada dia respecto del sol, señalaba $24^h\ 48''$, siendo así que solo habia de señalar $24^h\ 0'\ 0''$ cabales, respecto del tiempo verdadero. Supongamos ahora que se observase por la noche un fenómeno celeste, pongo por caso el principio de un eclipse, quando el relox señalaba $9^h\ 30'\ 57''$, hemos de determinar el tiempo ver-

Fig. verdadero que corresponde á esta hora del relox. Tomarémos primero la diferencia entre $0^h\ 3'\ 57''$ y $9^h\ 30'\ 57''$, y hallarémos que el eclipse empezó $9^h\ 27'\ 0''$ mas tarde por el relox que el medio dia verdadero. Pero como el relox adelanta 48″ cada dia, ó mientras que señala $24^h\ 0'\ 48''$, haremos esta regla de tres: $24^h\ 0'\ 48''$ son á 48″, como $9^h\ 27'\ 0''$ son á 19″, cantidad que el relox adelantaba desde mediodia hasta la observacion. Añadiremos estos 19″ á $0^h\ 3'\ 57''$ que el relox señalaba á medio dia, pues adelanta de un dia para otro, y sacarémos $0^h\ 4'\ 16''$ que es lo que el relox adelantaba á la hora de la observacion; esto es, lo que se debe rebaxar de la hora que señalaba en el instante de la observacion, esto es, de $9^h\ 30'\ 57''$, y quedarán $9^h\ 26'\ 41''$ este será el tiempo verdadero que se busca.

De la equacion del tiempo.

822. Hasta aquí solo hemos hablado del tiempo *verdadero ó aparente* observado por medio de las alturas correspondientes, que el sol señala en las meridianas, y los reloxes de sol, y rige comunmente en la sociedad. Hemos supuesto que el sol vuelve constantemente al meridiano al cabo de 24 horas; pero ya hemos dicho (806) que el movimiento del sol no es uniforme, y por consiguiente el tiempo ajustado á este movimiento no puede ser ni igual ni regular. No es, pues, el sol, hablando con rigor, una medida cabal del tiempo, y la hora verdadera que señala no puede servir para medir el tiempo cuya esencia estriba en su igualdad. Pero como el tiempo verdadero tiene la circunstancia de que le podemos observar siempre que queramos, nos valemos de él para hallar un *tiempo medio* y uniforme, qual se necesita para los cálculos.

El

El *tiempo medio* ó igual es el que señalaria á cada instante un relox de todo punto perfecto, el qual en el discurso de un año hubiese andado sin ninguna desigualdad, señalando medio dia el dia primero y último del año, en el mismo instante que el sol está en el meridiano. Este relox no deberia señalar medio dia en los demas dias intermedios, con el sol, porque para esto sería menester que el sol hubiese andado todos los dias con una misma velocidad, contra lo que tenemos dicho (806). Fig.

Quando el sol dexa al meridiano, y se restituye al mismo círculo el dia siguiente, ha andado 360° al parecer, pero en la realidad ha andado un grado mas, cantidad que el sol camina de poniente á oriente por entre las estrellas fixas, en el tiempo que gasta para restituirse al meridiano (600 y 635).

823 Para que el sol gastase constantemente un mismo tiempo en restituirse al meridiano, sería preciso que este movimiento propio del sol ácia el oriente fuese de una misma cantidad todos los dias, esto es, de 59′ 8″ (632). Pero por razon de las desigualdades de que hemos hecho mencion (806), sucede que á principios de Julio el sol no anda mas que 57′ 11″ cada dia ácia el oriente, y á principios de Enero anda 61′ 11″, es á saber 4′ mas que por Julio, á lo largo de la eclíptica en virtud de su movimiento propio. Esta es la primera causa por que los dias son desiguales; desde un medio dia al siguiente siempre se cuentan 24 horas, pero estas 24 horas serán mas largas quando el sol hubiese caminado 61′ 11″ ácia el oriente, que quando no hubiese andado mas que 57′ 11″, porque tendrá que andar 4′ con el movimiento diurno de oriente á occidente antes de llegar al meridiano.

824 Con esta causa, que pende de la desigualdad del movimiento solar en la eclíptica, se junta otra que pende de la situacion de la eclíptica. No basta que el

Fig. el movimiento del sol en la eclíptica sea igual para que los dias sean iguales, es preciso que este movimiento sea igual respecto del equador, y respecto del meridiano donde se observa; la duracion de las 24 horas pende en parte de la corta cantidad que el sol anda cada dia ácia el oriente; pero esta cantidad deberia medirse sobre el equador, porque las horas se cuentan al rededor del equador. No es, pues, el movimiento propio del sol como quiera al qual se debe atender para enterarse de la desigualdad de los dias, sino el mismo movimiento refiriéndole al equador; y si el sol tuviese un movimiento de tal naturaleza que correspondiese perpendicularmente al mismo punto del equador, la equacion del tiempo no variaría, pues los regresos al meridiano serian iguales.

317. Sea *O* el sol; *SB*, el meridiano al qual ha de llegar el sol quando el punto *O* esté mas adelantado, y el punto *Q* del equador llegue al punto *A* del meridiano, de modo que *OQ* sea un círculo horario, el qual á medio dia se confunde con el meridiano *SB*. Coja lo que cogiere de largo el arco *OS* de la eclíptica, este arco no gastará en pasar mas tiempo que el que mide el arco *AQ* del equador; quiero decir, que si el arco *AQ* fuese de un grado, el arco *SO*, sea grande ó chico, tardará 4 minutos en atravesar el meridiano; su situacion oblicua, ó inclinada puede hacer que su longitud *OS* sea mayor que la del arco *AQ*; su distancia al equador puede tambien ser causa de que el arco *OS* sea menor que el arco *AQ*, porque está comprehendido entre dos círculos de declinacion *SA*, *OQ*, ambos perpendiculares al equador *EAQ*, los quales se juntan en el polo, de manera que su distancia es menor ácia *O* que ácia *Q*; pero el arco *AQ* del equador es constantemente la medida del tiempo que el sol

gas-

gasta en venir desde el punto *O* al meridiano *SAB*. Fig.

825 Para combinar una con otra estas dos causas que hacen desiguales los regresos del sol al meridiano, figurémonos un sol medio moviéndose uniformemente al rededor del equador, de modo que ande cada dia 59′ 8″ (805), y los 360° en el mismo tiempo que el sol con su movimiento propio, esto es, en el discurso de un año, y el qual salga del equinoccio de la primavera en el instante que la longitud del sol es cero. Cada vez que este sol medio llegare al meridiano, diremos que es medio dia medio, y si el sol verdadero estuviere entonces mas ó menos adelantado, de modo que sea mas ó menos de medio dia, la diferencia que se notare se llamará la *equacion del tiempo*.

826 La ascension recta media del sol la señala el lugar del expresado sol medio que se mueve uniformemente en el equador; la ascension recta verdadera del sol, la que señala el círculo de declinacion que pasa por el lugar verdadero del sol puede discrepar de la media mas de 4° por razon de las dos causas especificadas (823 y 824); el sol verdadero puede pasar un quarto de hora antes ó despues que el sol medio; y la equacion del tiempo puede llegar á ser de 0^h 16′ 12″ el dia 1 de Noviembre.

827 Síguese de todo lo dicho hasta aquí que la diferencia entre la ascension recta media del sol, y su ascension recta verdadera, convertida en tiempo, dará la equacion del tiempo. Pero la ascension recta media es indispensablemente la misma cantidad que la longitud media, una vez que una y otra empiezan y acaban en el equinoccio, siempre son proporcionales al tiempo y crecen cada dia 59′ 8″; luego *la equacion del tiempo es la diferencia entre la longitud media, y la ascension recta verdadera del sol, convertida en tiempo.*

Fig. 828 Luego, ya que en la práctica no se puede hallar esta diferencia sino por dos operaciones y dos principios diferentes (823 y 824), la equacion del tiempo consta de dos partes; la primera es la diferencia entre la longitud media y la longitud verdadera, convertida en tiempo (806); la segunda es la diferencia entre la longitud verdadera, y la ascension recta verdadera, tambien convertida en tiempo. De cada una hay una tabla en el Tomo X de mi Curso.

De la paralaxe, distancia, rotacion y manchas del sol.

829 Los pasos de venus por el disco del sol han dado á conocer que la paralaxe orizontal del sol es de unos 9''. Con esto será facil de determinar á qué distancia está de la tierra (741). Porque el seno de 9'' es al radio, como el semidiámetro de la tierra es á la distancia del sol; y como el radio de un círculo es 22918 veces mayor que el seno de 9'', síguese que la distancia del sol es 22918 tantos del radio de la tierra, ó de unas 32830478 leguas de 5327 varas cada una.

830. Las manchas del sol son unas partes negras irregulares que se reparan de tiempo en tiempo en el sol, y parece que dán la vuelta en 25 dias 14 horas al rededor del mismo astro. Pero *Casini* determinó que estas manchas dán la vuelta en 27^d 12^h 20' respecto de la tierra, y este es el tiempo que gasta el sol en dar una vuelta al rededor de su exe, contándola desde que se vé una mancha en su disco hasta que esta vuelve á dexarse ver en el mismo sitio.

DE

Fig.

DE LOS PLANETAS PRIMARIOS.

831 El que conozca las doce constelaciones del zodiaco podrá distinguir facilmente los planetas en el cielo, porque en las doce constelaciones no hay mas que quatro estrellas de primera magnitud; es á saber, *Aldebaran*, *Régulo*, *la Espiga* y *Antares*, cuyo resplandor se parece al de los planetas. En conociendo la situacion de estas quatro estrellas, es facil distinguir un planeta de una estrella fixa.

Teórica de los Planetas primarios vistos desde la tierra.

832 Quando se sigue por medio de la observacion el camino que andan los planetas en sus revoluciones periódicas en la esfera de las estrellas fixas, se repara que no corresponden á los mismos puntos del cielo quando están á la misma longitud, y pasan cerca de unas mismas estrellas, y mas ó menos de la eclíptica, por lo que varía su latitud en el discurso de una revolucion. Los planetas están á veces al norte de la eclíptica, otras al sur, apartándose de ella algo mas de 8', lo que manifiesta que las órbitas planetarias no están en el plano mismo de la eclíptica.

833 Consta tambien de las observaciones que las órbitas planetarias son planos que pasan por el centro del sol. En quanto á la órbita de la tierra no hay ninguna duda; porque la declinacion del sol observada en verano é invierno respecto del equador, es una misma de cada lado, y esta declinacion observada diariamente, sigue la misma ley que la declinacion de un círculo máximo de la esfera calculada en todos sus puntos.

 Por

Fig. Por lo que mira á los demas planetas, es tambien cierta la proposicion. Porque sus latitudes, ó su máxima distancia de la eclíptica al norte y al sur, es una misma de cada lado, quando se la refiere al sol. Se observa tambien que sus nudos ó su interseccion con la eclíptica, están uno de otro á la distancia de 180°, refiriéndolos al sol; cuyas circunstancias no se verificarian si dichas órbitas no pasasen por el centro del sol. Pero aunque todos estos planos pasan por el sol, son inclinados unos respecto de otros, y pasan por distintas regiones del cielo.

834 Se refiere á la eclíptica la órbita de un planeta visto desde el sol, considerándola como un círculo máximo de la esfera, del mismo modo que referímos la eclíptica al equador (758). Sea *ALN* la
321. eclíptica; *APMN*, la órbita de un planeta; *P*, el lugar de dicho planeta; *PL*, un arco del círculo de latitud que pasa por el centro del planeta, y cae perpendicular á la eclíptica *ALN*; *L*, será el lugar del planeta reducido á la eclíptica, ó el punto de la eclíptica, en el qual se señala la longitud del planeta. Los puntos *A*, *N* donde la órbita del planeta corta la eclíptica, son los *nudos* del planeta. El nudo *A* donde está el planeta quando pasa del sur al norte de la eclíptica, se llama *nudo ascendiente*, porque entonces el planeta sube ácia el polo que para nosotros es elevado; ☊ es la señal del nudo ascendiente; el nudo *N* por donde pasa el planeta para volver al sur de la eclíptica, es el *nudo descendiente*, y se señala así ☋.

835 El arco *PL* del círculo de latitud comprehendido entre el lugar *P* del planeta, y la eclíptica, se llama la *latitud del planeta.* Quando los arcos *AP*, *AL* y *PL* tienen sus centros en el centro del sol, la latitud *PL* se llama *latitud heliocéntrica*; pero quando se consideran como círculos cuyo centro se su-

supone en el centro de la tierra, entonces el arco *PL* se llama *latitud geocéntrica*. Fig. 321.

836 El arco *AP* de la órbita de un planeta, contado desde el nudo ascendiente ácia el oriente, se llama *argumento de latitud*, porque de esta cantidad *AP* pende la latitud *PL*. Para hallar el argumento de latitud, se resta el lugar del nudo del lugar del planeta; porque el argumento de la latitud es la cantidad que la longitud del planeta tiene de mas que la longitud del nudo ascendiente; luego si de su longitud actual restamos la del nudo, tendrémos el argumento que se busca. Sucede con freqüencia que la longitud del nudo que hemos de restar, es mayor que la del planeta; entonces se le añaden á esta doce signos para que se pueda hacer la sustraccion.

837 La latitud de los planetas es boreal en los seis primeros signos del argumento de latitud. Con efecto, quando el planeta anda el semicírculo *APMN* que está al norte de la eclíptica, saliendo del nudo ascendiente *A* (834), su latitud es con evidencia boreal, y su argumento de latitud menor que 180°. Despues de andados seis signos ó 180°, el planeta pasa por su nudo descendiente, está al sur de la eclíptica, su latitud es austral, y su argumento de latitud pasa de seis signos.

838 Para calcular la latitud de un planeta, en conociendo su argumento de latitud, y el ángulo de inclinacion que forma la órbita del planeta con la eclíptica, basta resolver (II. 718 *D*) el triángulo *APL*, en el qual conocemos la hypotenusa *AP* y el ángulo *A*, para sacar el lado *PL* opuesto al ángulo conocido.

839 *La reduccion á la eclíptica* es la diferencia que vá del argumento de latitud á la distancia del planeta al nudo, contándole en la eclíptica, esto es, la diferencia que vá de *AP* á *AL*. Por consiguiente

Fig. 921. para calcular la reduccion á la eclíptica, basta resolver el triángulo *APL* (.II..718 *D*) buscando el *arco AL de la eclíptica*. Este arco será menor que el argumento de la latitud *AP*, todo lo que importare la reduccion á la eclíptica.

840 Esta reduccion se resta del argumento de la latitud *AP*, para sacar *AL* en la eclíptica, quando la distancia *AP* no llega á 90°; pero en el segundo quadrante del argumento, la hypotenusa *Ap* es menor que el arco *Al* de la eclíptica, y entonces se debe añadir la reduccion. Porque como *ARMN* es un semicírculo, y lo es tambien *ALON*, y en el triangulillo *Npl*, la hypotenusa *Np* es mayor que *Nl*, es preciso que el suplemento *Ap* de la hypotenusa sea menor que el suplemento *Al* del lado *Nl*; luego se debe añadir la diferencia, que es la reduccion, al argumento de la latitud *Ap* en el segundo quadrante de este argumento, desde 3 hasta 6 signos; en el tercer quadrante del argumento de la latitud, esto es, mas allá del punto *N*, la reduccion será sustractiva, como en el primero; y en el quarto quadrante, esto es, quando el argumento pasare de 9 signos, la reduccion será aditiva, conforme lo era desde 3 hasta 6 signos. La reduccion á la eclíptica es nula en los límites, esto es, á 90° del nudo, como en *M*; porque el arco *AM*, igualmente que el arco *AO*, es de 90° cabales. Esto no está pintado en la figura, porque el semicírculo *AON* vá figurado en una linea recta, siendo así que el semicírculo *AMN* vá figurado en una linea curva.

841 Las longitudes señaladas en las tablas Astronómicas, ván contadas en la órbita de cada planeta del modo siguiente. Supongamos que el punto *C* de la eclíptica sea el punto equinoccial, desde el qual se cuentan las longitudes, y que se haya tomado un arco *AB* de la órbita igual al arco *AC* de la eclíp-

ti-

tica, el punto B es el punto desde el qual se cuentan las épocas, de suerte, que quando el planeta está en P, su longitud es el arco BAP, ó la suma de los arcos CA y AP; y su longitud reducida á la eclíptica es el arco CAL. Fig. 321.

842 Con añadir ó restar, segun los casos, la reduccion á la eclíptica á la longitud del planeta en su órbita, se saca la longitud reducida á la eclíptica, y esta es la que los Astrónomos usan en sus cálculos.

843 Quando consideramos la órbita de un planeta como una circunferencia trazada en la concavidad del cielo, no queremos dar á entender que el planeta ande realmente una circunferencia, porque no es así. Pero todos los puntos de una órbita planetaria, vistos desde un punto qualquiera que esté dentro de dicha órbita, y en su mismo plano, se refieren en la esfera celeste y en la region de las estrellas fixas á puntos, que por estar todos en un plano de círculo máximo forman allí el rastro de una circunferencia, estén dichos puntos á la distancia que estuvieren del punto donde está el observador.

844 Veamos ahora qué restricciones pide la doctrina antecedente por razon de estar el observador no en el centro del círculo conforme hemos supuesto, sí en la tierra que muda constantemente de sitio.

Sea S el sol; TRN la eclíptica, ó la órbita anua de la tierra, cuyo plano pasa por el sol; AMDP, una órbita planetaria cuyo plano tambien pasa por el sol, pero está inclinado al de la eclíptica, y la corta en la seccion comun ADN; es preciso figurarse que la parte AOD está levantada sobre el plano de la figura, y que la parte DMA está debaxo del papel. El planeta en el punto A de su órbita está en el plano mismo de la eclíptica, está en la linea ADN comun á los dos planos, la qual llega hasta N en la eclíptica, igualmente que en la órbita del 322.

 pla-

Fig. 322. planeta. Pero al salir del punto *A* el planeta se levanta sobre la figura, la qual suponemos que representa el plano de la eclíptica, se vá levantando mas y mas hasta que llega al punto *O* donde su órbita está á la mayor distancia de la eclíptica.

845 A este punto mas apartado se le llama el *límite boreal*; así que el planeta le pasa, baxa á *D* donde vuelve á atravesar el plano de la eclíptica, traza la porcion inferior *DMA*, que es menester figurarse algunos grados debaxo del plano de la figura. El punto *A* por donde pasa el planeta para subir del lado del polo septentrional al norte de la eclíptica, es el *nudo ascendiente* (834); el punto *D* por donde pasa para ir á la parte meridional *DMA*, es el *nudo descendiente*; la distancia del planeta *P* á su nudo ascendiente, ó el arco *AP* de su órbita, ó por mejor decir el ángulo *ASP* en el sol, se llama *argumento de latitud* (836).

846 Despues de figurarse la parte *AOD* de la órbita levantada sobre el plano de la figura, será menester figurarse una perpendicular *PL* tirada desde el punto *P*, donde se hallare el planeta, al plano de la figura, que es el plano de la eclíptica: *PL* será la altura perpendicular del planeta mas arriba del plano de la eclíptica; el ángulo *PSL* en el qual se vé desde el sol esta distancia perpendicular del planeta á la eclíptica, es la latitud heliocéntrica (835); el ángulo *PTL* en el qual se vé la misma linea desde la tierra *T*, es la latitud geocéntrica; la linea *SP* es la verdadera distancia del planeta al sol ó su radio vector; *SL* es la distancia acortada del planeta, ó la distancia reducida á la eclíptica; *PT* es la distancia verdadera del planeta á la tierra, *LT* es la distancia acortada del planeta á la tierra Por ser la linea *PL* perpendicular al plano de la eclíptica, es indispensablemente perpendicular á todas las lineas

del

del plano (I. 594), y por consiguiente á *TL*; luego el ángulo *PLT* es un ángulo recto. El que se figurare que la linea *PL* cae á plomo sobre la figura, echará de ver que los triángulos *PLS*, *PLT* son ambos rectángulos en el punto *L* adonde vá á parar la perpendicular *PL* baxada al plano de la eclíptica. Fig. 322.

847 Así como el arco *AP*, ó el ángulo *ASP*, argumento de la latitud, es la distancia del planeta á su nudo contada en la órbita, el ángulo, *ASL* es la distancia del planeta al nudo reducida al plano de la eclíptica. Esta distancia, tomándola respecto del nudo mas inmediato, es menor que la distancia midiéndola en la órbita (839), ó menor que la del ángulo *ASP*, porque la linea *PL* que cae perpendicularmente al plano de la eclíptica, tiene su extremo *L* mas próximo á la linea de los nudos *ASN*, que su vértice *P*, con lo que el ángulo *ASL* es menor que el ángulo *ASP*; y la diferencia que hay entre estas dos distancias al nudo, la una en la eclíptica, y la otra en la órbita, se llama la *reduccion á la ecliptica* (839).

848 Llámase *paralaxe anua*, la diferencia que vá de la longitud heliocéntrica de un planeta á la longitud geocéntrica, esto es, de su longitud observada desde el sol á la que se observaría desde la tierra.

849 Una vez conocida la órbita de un planeta por medio de las observaciones referidas al sol, y de los métodos que despues se declararán, se puede determinar la longitud heliocéntrica del planeta para un tiempo qualquiera, y su radio vector ó su distancia al centro del sol. Si al mismo tiempo fuere tambien conocida la longitud heliocéntrica de la tierra, que siempre dista seis signos del sol, y la distancia del sol á la tierra, tendremos quanto es menester para calcular la longitud del planeta visto desde la tierra.

Sea

Fig. 322. 323. Sea ST la distancia del sol á la tierra; SL, la distancia acortada del planeta al sol; el ángulo TSL igual á la diferencia de las longitudes del planeta P, y de la tierra T, vistos desde el sol, cuyo ángulo se llama *comutacion*; la resolucion del triángulo TSL, del qual conocemos dos lados, y el ángulo que forman, dará á conocer el ángulo en la tierra, ó el ángulo STL que se llama *ángulo de elongacion.* Restando de la longitud del sol esta elongacion, quando el planeta estuviere al occidente, ó á la derecha del sol, se sacará la longitud geocéntrica del planeta, esto es, el punto de la eclíptica celeste, al qual corresponde la linea TL tirada desde la tierra al lugar del planeta reducido á la eclíptica.

850 La latitud geocéntrica ó el ángulo LTP se hallará con hacer esta proporcion: *El seno de la comutacion es al seno de la elongacion, como la tangente de la latitud heliocéntrica es á la tangente de la latitud geocéntrica.*

Porque en el triángulo PLS rectángulo en L (846) tenemos esta proporcion $SL : LP :: R : \text{tang } PSL$; en el triángulo PLT, tambien rectángulo en L, tenemos igualmente $TL : LP :: R : \text{tang } LTP$. De la primera proporcion sacamos $LP . R = SL . \text{tang } PSL$, y de la segunda, $LP . R = TL . \text{tang } LTP$; luego $SL . \text{tang } PSL = TL . \text{tang } LTP$, de donde sacamos estotra proporcion $TL : SL :: \text{tang } PSL : \text{tang } LTP$. Pero en todo triángulo rectilíneo TLS los lados son como los senos de los ángulos opuestos, esto es, $TL : SL :: \text{sen } LST : \text{sen } LTS$, luego $\text{sen } LST : \text{sen } LTS :: \text{tang } PSL : \text{tang } LTP$, latitud geocéntrica del planeta.

851 Para hallar la *distancia á la tierra* PT, se busca primero la distancia acortada, ó la distancia SL del planeta al sol reducida á la eclíptica. Esto se consigue multiplicando el radio vector SP, ó la ver-

verdadera distancia del planeta al sol en su órbita, Fig.
por el coseno de la latitud heliocéntrica, ó del án- 322.
gulo *PSL*. Porque como la linea *PL* es perpendicu- 323.
lar al plano de la eclíptica (846), el triángulo *SLP* es rectángulo en *L*; luego (I.720) $R : SP :: \text{sen } SPL$ ó $\cos PSL : SL$; y como siempre se toma $R = 1$, $SL = SP \cdot \cos PSL$.

En el triángulo *LST* conocemos todos los ángulos y el lado *SL* distancia acortada del sol al planeta; harémos, pues, esta proporcion, $\text{sen } STL : SL :: \text{sen } LST : TL$, esto es, *el seno de la elongacion es al seno de la comutacion, como la distancia acortada del planeta al sol es á la distancia acortada del planeta á la tierra.*

852 Finalmente, si dividimos esta distancia acortada *TL* por el coseno de la latitud geocéntrica *LTP*, sacarémos la distancia verdadera *TP* del planeta á la tierra; por la misma razon que la distancia verdadera multiplicada por el coseno de la latitud heliocéntrica, dió la distancia acortada del planeta al sol (851).

853 Las desigualdades que notamos en el movimiento de los planetas por razon del movimiento de la tierra, esto es, las paralaxes anuas, sirven para averiguar sus distancias.

Observó *Copérnico* el dia 25 de Febrero de 1514 324.
á las cinco de la mañana, la longitud de saturno 209°, suponiendo *S* el centro del sol, *L*, la tierra, *F*, saturno; sacaba por el cálculo de los movimientos medios observados en las oposiciones, y de las equaciones de saturno y de la tierra determinadas de antemano, que si la tierra estuviera en *K*, se hubiera visto saturno á 203° 16′, esta era su longitud vista desde el sol; la diferencia 5° 44′ era el ángulo *KFL* que nosotros llamamos (848) la *paralaxe anua.* El ángulo *LSK* ó *LSF*, diferencia entre el lugar de sa-

Fig. 324. saturno *F* visto desde el sol, y el lugar de la tierra *L* calculado para el mismo tiempo, era de 67° 35', que es lo que hoy dia llamamos *comutacion* (849); luego el ángulo *L* era de 106° 41'. Una vez conocidos todos los ángulos de este triángulo, se sabia qué razon habia entre sus lados *SL* y *SF*, esto es, entre la distancia de la tierra al sol, y la de saturno al sol; esta razon se hallaba ser la de 1 á 9,6 con corta diferencia; quiero decir, que saturno estaba $9\frac{1}{2}$ veces mas apartado del sol *S* que la tierra *L*.

854 Lo propio diremos de otro planeta qualquiera. Quando se ha observado muchas veces su oposicion al sol, y su longitud en el tiempo que es la misma vista desde la tierra que vista desde el sol, como quando el sol *S*, la tierra *K*, y el planeta *F* están en una misma linea, podemos calcular puntualmente dicha longitud vista desde el sol, para el tiempo en que la tierra está 90° lexos de allí, esto es, ácia *L*, y es el ángulo de comutacion $FSL = 90°$. Si se observa entonces la longitud del planeta vista desde la tierra, se le hallará una diferencia de muchos grados, y esta cantidad será el ángulo *SFL*, paralaxe anua del planeta *F*.

855 La latitud geocéntrica de los planetas es la que determina lo que llamamos el *ancho del zodiaco*. Venus es de todos los planetas el que tiene mayor latitud. En el mes de Agosto de 1756 era de 8° 24', y en 1700 se observó de 8° 40'. Por consiguiente el ancho del zodiaco es por lo menos de $17°\frac{1}{2}$ en este siglo.

De las revoluciones, equaciones seculares, y regreso de los planetas á las mismas situaciones.

856 La *duracion* de las revoluciones de los planetas que es preciso conocer para averiguar las paralaxes anuas, solo se puede determinar puntualmente

te por medio de las conjunciones y oposiciones de los planetas con el sol. Porque como los planetas se mueven al rededor del sol, sus revoluciones se han de contar al rededor de este astro, y á él deben referirse; y como las conjunciones y oposiciones son los únicos puntos donde el lugar de un planeta visto desde la tierra está en una misma linea con el lugar visto desde el sol, y en el qual se pueda determinar puntualmente el lugar visto desde el sol, estas son por consiguiente las circunstancias precisas para esta investigacion. Fig.

857 Las conjunciones y oposiciones de los planetas que sirven para determinar las duraciones de sus revoluciones medias, deben tomarse á distancias muy grandes unas de otras, á fin de que el efecto de las equaciones ó de las desigualdades periódicas se desaparezca y esté como perdido en el crecido número de revoluciones entre las quales estará repartido, conforme se practica para con el sol (810).

858 Las *desigualdades periódicas* de que hicimos mencion (806), se restituyen á cada revolucion; y no estorban el que sean iguales estas revoluciones quando se considera el regreso del planeta al mismo punto de su órbita. Sin embargo, despues de observadas las revoluciones en distintos siglos, se ha notado un atraso en el movimiento medio de saturno, y una aceleracion en los movimientos de júpiter y la luna.

859 La *situacion aparente* de un planeta visto desde la tierra, pende no solo del lugar donde se halla en realidad, mas tambien del lugar donde está la tierra. Porque en virtud de la paralaxe anua (848) un planeta puesto en un mismo lugar, podria parecer mas oriental, si la tierra estuviere mas occidental. Por consiguiente para que un planeta se restituya respecto de nosotros á la misma longitud don-

Fig. de se halló una vez, es preciso que el planeta y la tierra se hallen ambos en el mismo punto de su órbita; esto es, á la misma longitud; entonces el lugar del planeta, su latitud vista desde la tierra, igualmente que su paso por el meridiano, el nacer y ponerse son los mismos que antes, y vuelven á empezar por el mismo orden.

Si fuese facil hallar para los planetas períodos de esta naturaleza, se ahorrarian mucho trabajo los calculadores de las *efemérides*; pero estos periodos son muy largos ó muy imperfectos.

Estaciones y retrogradaciones de los Planetas.

860 Los planetas inferiores, mercurio y venus, dán la vuelta al rededor del sol en menos tiempo que la tierra; por lo mismo han de parecer directos en sus conjunciones superiores, y retrogrados en sus
325. conjunciones inferiores. Sea *TBAÇ* la órbita de la tierra, y *PEMR* la órbita de venus ó mercurio; quando la tierra está en *T*, y venus en la conjuncion superior *P*, esto es, mas allá del sol, parece que vá, y vá realmente, de occidente á oriente, esto es, ácia la izquierda desde *PM* ácia *E*. Pero si estando la tierra en *T*, se halla venus en su conjuncion inferior *M*, nos parecerá que camina ácia la derecha, porque vá de *M* á *R* mas aprisa de lo que la tierra camina desde *T* á *C*; será, pues, al parecer venus retrogrado en su conjuncion inferior; porque aunque siga en realidad el mismo rumbo que quando estaba en *P*, sigue respecto de nosotros un rumbo contrario; en el primer caso iba ácia la izquierda desde *P* á *E*, y en el segundo parece que vá ácia la derecha desde *E* á *M*, luego entonces parece que camina contra el orden de los signos.

En-

861 Entre el movimiento directo y el movimiento retrogrado hay indispensablemente un instante en que el planeta parece *estacionario*; entonces dexa de ser directo, y está para ser retrogrado, bien que no es ni uno ni otro, está en el punto donde se juntan los arcos de direccion y retrogradacion, y este es el punto que se debe determinar para averiguar quanto dura la retrogradacion. Fig. 325.

Si la tierra se mantuviera inmobil en *T*, venus nos pareceria estacionario quando estuviese en la tangente *ET*, tirada desde la tierra á la órbita del planeta; porque hay en el punto *E* un arco pequeño de la órbita que se junta y confunde con la tangente *TE*, y todo el tiempo que gasta el planeta en andar este arco pequeño de su órbita, se mantiene respecto de nosotros en la misma linea, en el mismo rayo, y corresponde al mismo punto del cielo, si suponemos la tierra fixa en *T*.

862 Pero como la tierra se mueve desde *T* á *C*, basta esto para que nos parezca (701) que el planeta se mueve en direccion contraria y ácia la izquierda, bien que esté en la tangente *TE*; algun tiempo despues sucederá que el movimiento *ED* del planeta, y el movimiento *GF* de la tierra en el mismo tiempo serán tales, que los rayos visuales *GE*, *FD* serán paralelos uno con otro; entonces nos parecerá que el planeta corresponde todo aquel tiempo al mismo punto de la ecliptica, nos parecerá estacionario. Porque (722) todas las rectas paralelas tiradas desde nuestro ojo al cielo, son respecto de nosotros una sola y misma linea dirigida á una misma longitud, ó á un mismo lugar del cielo. 326.

Fig.

Teórica del movimiento de los Planetas vistos desde el sol.

863 Luego que *Keplero* vió quan evidente y cierto era el sistema de *Copérnico*, se dedicó á determinar las distancias de los planetas al sol, y las leyes de su movimiento al rededor del sol; logró completamente su intento, pues averiguó los tres puntos mas fundamentales de toda la física celeste, que se llaman hoy dia las *leyes de Keplero*.

1.° *Que las órbitas de los planetas son elipses en cuyo focus está el sol.*

2.° *Que andan estas elipses con tales velocidades, que las areas siempre son propocionales á los tiempos.*

3.° *Que los quadrados de los tiempos de sus revoluciones son como los cubos de sus distancias al sol.*

864 Para determinar la figura de las órbitas planetarias, consideró particularmente la de marte, por estar mas próxima á la tierra, y ser muy grande su excentricidad, é indagó el medio de hallar la distancia de marte al sol en diferentes puntos de su órbita, tomando siempre por escala comun la distancia de la tierra al sol. Para esto se valió de la paralaxe
323. anua de marte, ó del ángulo *SPT*, infiriéndole de las observaciones (853); determinó por el mismo método la distancia de marte al sol en su afelio y su perihelio, la una de 16678 partes, la otra de 13850, suponiendo siempre la distancia media de la tierra al sol de 10000. Así, la distancia media de marte era de 15264 y la excentricidad de 1414. Despues escogió otras tres distancias ácia los lados de la órbita, entre
327. el afelio y el perihelio, como *SM* y *SD*, determinándolas por el mismo método siguiendo las observaciones de *Tycho*. Estas distancias de marte al sol to-

todas se hallaron mas cortas de lo que correspondia Fig.
en una órbita circular, de la misma excentricidad y 327.
el mismo radio, como el círculo circunscripto *AKP*. Seguíase de aquí que la órbita de marte era mas angosta que un círculo, cerrada por los lados y de figura ovalada.

865 La distancia de la tierra al sol es á la de júpiter al sol, como 10 á 52, y por consiguiente sus cubos son como 1 á 140; sus revoluciones duran $365\frac{1}{4}$ y $4332\frac{1}{5}$ dias, cuyos quadrados son, despreciando los últimos guarismos, como 1 á 140; luego es una misma la razon; el quadrado del tiempo periódico de júpiter es 140 veces mayor que el quadrado del tiempo periódico de la tierra, y el cubo de la distancia media de júpiter es 140 veces mayor que el cubo de la distancia media de la tierra.

866 La otra ley fundamental é igualmente importante del movimiento de los planetas, es que las areas son proporcionales á los tiempos.

Prueban esta ley con evidencia las observaciones del diámetro del sol, esto es, que el movimiento del sol es tanto mas lento quanto mas apartado está de la tierra. El diámetro del sol en verano es de 31′ 31″, y en invierno es de 32′ 36″, segun consta de repetidas observaciones hechas con sumo cuidado; esto prueba que la distancia del sol en invierno es á su distancia en verano, como 31′ 31″ es á 32′ 36″; porque las magnitudes aparentes de un objeto distante siguen la razon inversa de las distancias (497). El movimiento horario del sol en invierno es de 2′ 33″; pero 32′ 36″ : 31′ 31″ :: 2′ 33″ : 2′ 28″; luego el movimiento horario del sol deberia ser de 2′ 28″ en verano, si este movimiento horario fuese en sí constante y uniforme, y pendiesen solo de la distancia del sol sus diferencias. Sin embargo este movimiento horario por las observaciones solo se halla de 2′ 23″; es, pues, menor de

Fig. lo que deberia ser en este supuesto. Luego ademas de los 5″ que ha de haber de diferencia entre los movimientos horarios del sol en estío é invierno por razon de sus diferentes distancias, hay otra diferencia real de 5″, la qual no pende de las distancias, y es un atraso verdadero en el movimiento aparente del sol, luego el movimiento real de la tierra es con efecto mas lento en el afelio que en el perihelio. Se echa tambien de ver que es en razon inversa de las distancias, pues se hallan 2′ 23″, en lugar de 2′ 28″ que habria suponiendo uniforme el movimiento, esto es, 5″ de exceso en el movimiento horario en invierno respecto del movimiento en verano. Pero 2′ 23″ es á 2′ 28″, como 31′ 31″ es á 32′ 36″, esto es, como el diámetro en estío es al diámetro en invierno, ó como la distancia en invierno es á la distancia en verano. Luego el movimiento del sol en verano es al movimiento que nos pareceria tener, si se moviese siempre uniformemente, en razon inversa de su distancia.

Teórica del movimiento elíptico de los Planetas.

327. 867 Llámase *radio vector* de un planeta la linea tirada desde el centro del sol al centro del planeta, ó la distancia del planeta al focus de su elipse. Sea *AMDP* la órbita elíptica de un planeta andada al rededor del focus *S*, donde está el sol (864); *M*, el lugar actual de un planeta en un instante dado; la linea *SM* será el radio vector.

La linea de los ápsides, ó el exe mayor de la elipse señala el afelio y el perihelio del planeta. El *afelio* ó el *ápside superior*, es el punto de la órbita donde el planeta está mas distante del sol; tal es el vértice *A* del exe mayor *AP*, el mas apartado del focus *S*. El *perihelio* ó *el ápside inferior* es el punto

de

de la órbita donde el planeta está mas próximo al sol; tal es el extremo inferior *P* del exe mayor *AP*, el mas inmediato al focus *S* donde está el sol. Fig. 327.

Llamamos *anomalía* la distancia de un planeta á su afelio; pero esta distancia se considera de distintos modos.

La *anomalía verdadera* es el ángulo que forma en el focus de la elipse el radio vector con la linea de los ápsides; tal es el ángulo *ASM* causado por el exe mayor *AS* con el radio vector *SM*.

La *anomalía excéntrica* es el ángulo que forma en el centro de la elipse el exe mayor con el radio de un círculo circunscripto, tirado al extremo de la ordenada que pasa por el lugar verdadero del planeta. Así, despues de trazar un círculo *ANP* sobre el diámetro *AP*, exe mayor de la órbita, se tirará la ordenada *RMN* por el punto *M*, donde suponemos que está el planeta, y al extremo *N* de esta ordenada se tirará el radio *CN*; este determinará la anomalía excéntrica *AN* ó *ACN*.

La *anomalía media* es la distancia al afelio suponiéndola proporcional al tiempo; es la que crece uniforme é igualmente desde el afelio hasta el perihelio. Así, un planeta que gastase seis meses en ir desde *A* á *P*, tendría al cabo del primer mes 30 grados de anomalía media, 60 grados al cabo del segundo mes; y así de los demas, creciendo siempre proporcionalmente al tiempo. Si figuramos en una linea *CX* la anomalía media, suponiendo que esta linea dá la vuelta uniformemente al rededor del centro *C*, la linea *CX* estará al principio mas adelantada que la linea *CN*, porque *AN* crece mas despacio cerca del afelio donde el movimiento del planeta es menor que el movimiento medio, y este adelantamiento crecerá mientras la velocidad del planeta fuere menor que su velocidad media; despues el punto *N* se acercará al

Fig. 327. punto *X*, hasta juntarse uno con otro en el perihelio *P*; allí las tres anomalías se confunden y son cabalmente de 180°.

La diferencia entre la anomalía media y la anomalía verdadera forma la *equacion de la órbita* ó la *equacion del centro*.

868 Una vez que la anomalía media es proporcional al tiempo, y es una parte del tiempo de la revolucion, se podrá medir con qualquiera cantidad que creciere uniformemente. Por cuya razon no solo podemos llamar *anomalía media* el arco *AX*, el ángulo *ACX*, y el sector ó area circular *ACX*, mas tambien el sector elíptico ó la area *ASM*, comprehendida entre el radio vector *SM*, el exe mayor *SA* y el arco de elipse *AM*. Porque como las areas trazadas por el radio vector *SM* son proporcionales á los tiempos (866), el sector *AMS* será la sexta parte de la superficie elíptica *AMDPA* al cabo del primer mes, en el supuesto de poco ha (867); será por consiguiente su tercera parte al cabo de dos meses, y uniformemente á este tenor; por manera que la superficie ó area elíptica será la cantidad proporcional al tiempo, un quebrado igual al quebrado del tiempo, ó á la anomalía media. Se podrá, pues, decir al cabo del primer mes que la anomalía media es de 30°, ó, en general, que es un dozavo; porque como entonces los 30° son la duodécima parte del cielo, el arco será la duodécima parte del círculo, el tiempo gastado en andarle será la duodécima parte del tiempo de toda la revolucion; y finalmente la area *AMS* será la duodécima parte de la area de toda la elipse; pero lo regular es expresar la anomalía media en grados.

869 Una vez averiguado que los planetas andan elipses trazando areas proporcionales á los tiempos, solo falta inferir el lugar verdadero de un planeta pa-

para un tiempo dado. En conociendo lo que dura la revolucion del planeta, pongo por caso la de mercurio, que es de 86 dias, si se pregunta qual será el lugar de mercurio al cabo de dos dias, esto es, al cabo de la 43^{ma} parte de su revolucion, se sabrá entonces que el area del sector *ASM* comprehendido entre el afelio y el radio vector *SM*, es la 43^{ma} parte de la superficie elíptica. Esta porcion del tiempo ó esta parte de la elipse es lo que llamamos la *anomalía media*, la qual tambien se puede expresar en grados, tomando la 43^{ma} parte de los 360^{o} de todo el círculo. Porque, segun queda dicho, podemos llamar indistintamente anomalía media una porcion del tiempo, una porcion de la elipse, una porcion de la circunferencia del círculo. Siempre es un quebrado dado quando se busca el lugar de un planeta, pero le valuaremos en grados para seguir la forma usada en las tablas astronómicas, donde todas las anomalías y todas las equaciones están expresadas en grados, minutos y segundos. Fig. 327.

870 En siendo conocida la anomalía media ó la superficie del sector *AMS*, se ha de buscar la anomalía verdadera, ó el ángulo *ASM* de dicho sector; esto viene á ser lo mismo que proponer: *dada la anomalía media, hallar la anomalía verdadera.* Esta es la cuestion propuesta por *Keplero* á los Geómetras, y es conocida con el nombre de *Problema de Keplero.*

871 Para resolverla con menos trabajo, se resuelve al reves; quiero decir, que se supone conocida la anomalía verdadera para sacar la anomalía media. Así lo haremos, pero primero sentarémos algunas proposiciones que nos hacen al caso.

872 *Si en una elipse* AMP, *á la qual se ha circunscripto el círculo* ANP, *fuese* CX *la linea de la anomalía media*; M, *el lugar verdadero del planeta*;

Fig. RMN, *la ordenada que pasa por el lugar del planeta, el sector circular* ANSA *siempre es igual al sector circular* ACX *de la anomalía media.*

Sea T el tiempo total de la revolucion del planeta; t, el tiempo que ha gastado en ir desde A á M; por la ley probada (866) tendremos t es á T como el sector AMS es á la superficie de la elipse; y como ACX es la anomalía media, tambien tendremos t es á T como ACX es á la superficie del círculo; luego AMS es á ACX como la superficie de la elipse es á la superficie del círculo. Pero por lo probado (II. 652) AMS es á ANS como la superficie de la elipse es á la superficie del círculo; tenemos, pues, estas dos proporciones

$AMS : ACX :: \text{elipse} : \text{círculo}$

$AMS : ANS :: \text{elipse} : \text{círculo}$; luego

$AMS \times \text{círculo} = ACX \times \text{elipse}$,

$AMS \times \text{círculo} = ANS \times \text{elipse}$; y finalmente

$ACX \times \text{elipse} = ANS \times \text{elipse}$; luego $ACX = ANS$.

328. 873 *En todo triángulo rectángulo* MRS, *si el ángulo* RSM *está dividido en dos partes iguales, la tangente de la mitad del ángulo* RSM *será* $= \frac{RM}{RS+SM}$.

Porque si hacemos $SB = SM$, tendremos el ángulo B igual á la mitad del ángulo S (I. 440 y 448), y la tangente del ángulo $B = \frac{RM}{RB}$ (I. 725) $= \frac{RM}{RS+SB} = \frac{RM}{RS+SM}$.

874 El radio vector $SM = \frac{PR \cdot SA}{CA} - SR$.

Porque se probó (II. 304) que si hacemos $CA = a$, $CR = x$, $CS = e$, el radio vector $SM = \frac{aa+ex}{a} = \frac{(a+x)(a+e) - a(e+x)}{a}$. Pero $a+x = PR$, $a+e = SA$, $e+x = RS$; luego $SM = \frac{PR \cdot SA}{CA} - SR$.

La

875 *La raiz quadrada de la distancia perihelia es á la raiz quadrada de la distancia afelia, como la tangente de la mitad de la anomalía verdadera es á la tangente de la mitad de la anomalía excéntrica.* Fig. 327.

Si usamos las expresiones de antes (873), los triángulos rectángulos MSR, NCR darán tang $\frac{1}{2}$ MSR : tang $\frac{1}{2}$ NCR :: $\frac{RM}{SR+SM}$: $\frac{RN}{CR+CN}$; si en lugar de la razon de RM á RN substituimos la razon de CD á CA igual con ella (H. 293), y en lugar de $SR + CM$ su valor $PR \cdot \frac{SA}{CA}$ (874); y finalmente PR en lugar de $CR + CN$, la proporcion se transformará en estotra tang $\frac{1}{2}$ MSR : tang $\frac{1}{2}$ NCR :: $\frac{CD \cdot CA}{PR \cdot SA}$: $\frac{CA}{PR}$ :: $CD : SA$ :: $\sqrt{(aa - ee)} : a + e$, como $aa - ee = (a+e)(a-e)$, y $a+e = \sqrt{(a+e)(a+e)}$, será $\sqrt{(aa-ee)} : a+e :: \sqrt{(a+e)(a-e)} : \sqrt{(a+e)(a+e)}$, cuya última razon, partiendo cada uno de sus términos por $a+e$, se reduce á $\sqrt{(a-e)} : \sqrt{(a+e)}$, será por lo mismo tang $\frac{1}{2}$ MSR : tang $\frac{1}{2}$ NCR :: $\sqrt{(a-e)}$: $\sqrt{(a+e)}$ :: $\sqrt{PS}$: $\sqrt{SA}$, cuya proporcion está diciendo que la tangente de la mitad de la anomalía verdadera ASM es á la tangente de la mitad de la anomalía excéntrica ACN, como la raiz quadrada de la distancia perihelia PS es á la misma raiz de la distancia afelia AS.

876 *La diferencia que vá de la anomalía excéntrica á la anomalía media, es igual al producto de la excentricidad por el seno de la anomalía excéntrica.*

El sector circular $ANSA$ es igual al sector de la anomalía media ACX (872); si de cada uno se resta la parte comun ACN, saldrá el sector NCX igual al triángulo CNS. La superficie del sector circular NCX es igual al producto de CN por la mitad del arco NX, la superficie del triángulo CNS es

 igual

Fig. igual al producto de CN por la mitad de la altura 327. ST, que es una perpendicular baxada desde el focus S á la base NC, prolongada mas allá del centro C; luego una vez que las dos superficies son iguales, y tienen comun uno de los factores CN, los demas factores son tambien iguales; por consiguiente el arco NX es igual á la linea recta ST. Pero como del triángulo STC, rectángulo en T, sacamos $ST = CS$. sen TCS (I. 720), síguese que $NX = CS$. sen TCS $= CS$. sen ACN; luego la diferencia NX entre la anomalía excéntrica AN y la anomalía media AX, es igual al producto de la excentricidad CS por el seno de la anómalía excéntrica ACN.

877. Las anomalías de los planetas todas se expresan en minutos y segundos; luego para hallar la diferencia en segundos que va de la anomalía media á la anomalía excéntrica, es preciso que la excentricidad tambien vaya expresada en segundos. Si la excentricidad del planeta fuere expresada en partes de la misma especie que la distancia media, se dirá: la distancia media es á la excentricidad, como el número de 206264″ que caben en el radio de un círculo (II. 638), es al número de segundos que caben en la excentricidad. Si esta excentricidad fuere expresada en quebrado de la distancia media del mismo planeta, bastará multiplicarla por los 206264″, que hay en el arco de 57° 17′ 44″ igual al radio, para sacar dicha excentricidad en segundos.

878. Las dos proposiciones (875 y 876) sirven para hallar la anomalía media, una vez dada la anomalía verdadera; pero la cuestion esencial es determinar la anomalía verdadera quando la media es dada. Hay muchos modos de resolverla directamente, bien que por aproximacion; pero es estilo comun suponer una anomalía verdadera qualquiera; convirtiéndola en media por las reglas expresadas poco ha; si

si la que se saca por este medio no es igual á la que Fig.
era dada, es señal de ser falso el supuesto, y se hace entonces otro supuesto de anomalía verdadera, 307.
hasta dar con una anomalía verdadera que dé cabalmente la anomalía media dada. Como hay tablas para cada planeta y cada grado de anomalía, son fáciles de hallar estos supuestos.

879 Una vez averiguada la anomalía verdadera, es facil de averiguar la distancia al sol ó el radio vector *SM* por esta proporcion. *El seno de la anomalía verdadera es al seno de la anomalía excéntrica, como la mitad del exe menor es al radio vector.*

Si tiramos la *NQ*, paralela al radio vector *SM*; serán semejantes los dos triángulos *MRS*, *NRQ* (I. 517). Esto supuesto, una vez que por lo probado (II. 652) *RM* : *RN* :: *CD* : *CK* = *CN*, y los triángulos semejantes tienen proporcionales sus lados (I. 517), de los triángulos *MRS*, *NRQ*, sacaremos *SM* : *QN* :: *RM* : *RN* :: *CD* : *CN*, y por lo mismo *SM* : *QN* :: *CD* : *CN*, ó *SM* : *CD* :: *QN* : *CN* (I. 156). Pero *QN* : *CN* :: sen *QCN* : sen *CQN* (I. 731), y sen *QCN* : sen *CQN* :: sen *RCN* (I. 711) : sen *RSM* (I. 372). Luego sen *RCN* : sen *RSM* :: *SM* : *CD*, y porque sen *RCN* = sen *NCS* (I. 711), y sen *RSM* = sen *CSM*, será sen *CSM* : sen *NCS* :: *SM* : *CD*, y finalmente (I. 156) sen *NCS* : sen *CSM* :: *CD* : *SM*, cuyo quarto término será la expresion del radio vector en la hypótesi de *Keplero*.

880 Quando no se necesita una suma precision, se saca la anomalía verdadera con una proporcion no mas, y este método se llama *la hypótesi elíptica simple*. Está probado que el movimiento de un planeta en una órbita elíptica, es sensiblemente uniforme quando se le supone observado desde el focus superior *F* de la elipse. Para calcular la anomalía verdadera en este caso, se prolongará *FL*, de modo que

LE

Fig. 329. *LE* sea igual á *LS*, y se tirará la *SE*; resultará de aquí un triángulo *SFE*, en el qual (I. 738) la semisuma de dos lados, como *FE* y *FS* es á su semidiferencia, como la tangente de la semisuma de los ángulos adyacentes *S*, *E*, es á la tangente de su semidiferencia. Substituyamos otras denominaciones en lugar de estos quatro términos; la semisuma de *FS* y *FE* es lo mismo que la distancia afelia *SA*; porque *FE* ó *FL* mas *SL* es igual (II. 288) al exe mayor; luego *FE* mas *FS* vale el exe mayor mas dos veces la excentricidad, y si tomamos la mitad del total, se halla que la semisuma de *FE* y *FS* es el semiexe con la excentricidad; esto es, *SA*. Se echa de ver que su semidiferencia es igual á *SP*. La semisuma de los ángulos *E* y *S* es la mitad del ángulo externo *AFE*, ó de la anomalía media; finalmente su semidiferencia es la mitad de la anomalía verdadera *FSL*, pues la diferencia que vá del ángulo *FSE* al ángulo *LSE* (igual con *LES*), no se distingue del ángulo *FSL*; luego la proporcion de antes se reduce á estotra: *La distancia afelia es á la distancia peribelia, como la tangente de la mitad de la anomalía media es á la tangente de la mitad de la anomalía verdadera.*

329. El radio vector *SL* se halla con igual facilidad por medio del triángulo *SLF*, con decir, el seno de la equacion de la órbita *FLS* es al duplo de la excentricidad *FS*, como el seno del ángulo *F* ó de la anomalía media es á la distancia del planeta al sol, en la hypótesi elíptica simple.

De la equacion de la órbita.

329. 881 La misma figura nos servirá para hacernos cargo de todas las propiedades del movimiento desigual de los planetas y de la equacion de la órbita.

1.°

1.° Esta equacion es nula en *A*, esto es, en el ápside superior, afelio ó apogeo, pues en este punto el lugar medio y el lugar verdadero se confunden uno con otro, *FL* coincide con *SL*. Al salir del ápside superior, su diferencia crece con rapidez, porque como la velocidad verdadera es mínima en *A*, discrepa máximamente de la velocidad media. 2.° Esta diferencia se vá acumulando cada dia, todo el tiempo que la velocidad verdadera es menor que la velocidad media; quando son iguales, se halla un punto *B* ácia los tres signos y algunos grados de anomalía media, donde la diferencia que creció hasta entonces es máxima, y donde la equacion ó el ángulo *FLS* dexa de crecer, manteniéndose casi uno mismo algun tiempo, para ir despues menguando hasta el ápside inferior (sea perigeo ó perihelio), donde el lugar medio vuelve á confundirse con el lugar verdadero. 3.° La equacion es sustractiva, se resta del lugar medio ó de la anomalía media *AFL* en los seis primeros signos para hallar el lugar verdadero, porque la velocidod media al salir del ápside superior, es mayor que la velocidad verdadera; por consiguiente el lugar medio está mas adelantado, y por lo mismo se debe restar de la longitud media la cantidad de la equacion para hallar el lugar verdadero. Lo contrario sucede despues del paso por *P*, donde la velocidad verdadera es la mayor. Fig.

882 La equacion máxima se puede sacar por un cálculo riguroso, igualmente que el grado de anomalía media donde se verifica esta equacion máxima; para lo qual basta hallar el punto *M*, en el qual se verifica la velocidad media. Y de hecho, así que el 330.
planeta llega al punto donde su velocidad angular *DFR*, esto es, el ángulo que anda visto desde el sol, es igual con la velocidad media, v. gr. de 59′ 8″ cada dia, si fuese la tierra, la longitud media dexa de

Fig. de anticipar respecto de la longitud verdadera; entonces discrepa de ella máximamente, porque hasta aquel instante la velocidad real que era menor, hacia que el lugar verdadero atrasase cada dia respecto del lugar medio. Pero en llegando la velocidad verdadera á ser igual con la velocidad media, está para superarla, está para ganar lo que habia perdido hasta entonces, el lugar verdadero se vá acercando al lugar medio, y la equacion de la órbita mengua. Está, pues, toda la dificultad en hallar el punto M, y la anomalía verdadera AFM del planeta en el instante que su velocidad es igual con la velocidad angular media.

Para lo qual se tomará una linea FM, media proporcional entre los dos semiexes de la órbita, se trazará desde el focus F como centro un círculo MN con el radio FM, de cuyo círculo la superficie será igual á la superficie de la elipse (*). Supongamos un cuerpo que ande el círculo MN en un tiempo igual al de la revolucion del planeta en su elipse, su velocidad angular será constantemente igual á la velocidad angular media del planeta, pongo por caso de 59′ 8″ para el sol, la area andada en el círculo siempre será igual á la area andada en el mismo tiempo en la elipse, una vez que las areas totales son iguales y andadas en tiempos iguales, siendo unos

(*) Porque si llamamos a el semiexe mayor; b, el semiexe menor de la elipse; E, su superficie; c, la circunferencia de un círculo cuyo radio $= 1$; la circunferencia cuyo radio $= a$, será ac, y la superficie de este círculo, que es la del círculo circunscripto á la elipse, será $\frac{ca^2}{2}$. Pero (II. 652) $\frac{ca^2}{2} : E :: a : b$; luego $E = \frac{cab}{2}$. Y como en los mismos supuestos la superficie de un círculo cuyo radio $= \sqrt{ab}$, ó la media proporcional entre el exe mayor y el menor, será $\frac{c\sqrt{ab}.\sqrt{ab}}{2} = \frac{cab}{2}$, queda probada la proposicion.

unos mismos los tiempos de las revoluciones, y las areas parciales de la elipse proporcionales á las partes del tiempo. Si el sol anda v. gr. en un dia una area *DFR* de su elipse igual á la 365ma parte de la superficie elíptica, la area *EFO* trazada en el círculo, tambien será la 365ma parte de la area del círculo, igual con la elipse; la velocidad verdadera del sol, ó el ángulo *DFR*, será, pues, igual á la velocidad media en *M*, esto es, al ángulo *DFO*, porque son dos sectores iguales que tienen la misma longitud *FM*, la misma superficie, y por consiguiente el mismo ángulo. Fuera de esto, los triángulos iguales *MED*, *MRO*, el uno fuera y el otro dentro del circulo, manifiestan que el sector elíptico es igual al sector circular que tiene el mismo ángulo en *F*. Por consiguiente, para hallar el punto de la velocidad media, hemos de hallar la interseccion *M* de la elipse con el círculo que es igual con ella en superficie. Tirarémos desde el punto *M* al otro focus *B* de la elipse una linea *MB*, resultará un triángulo *BFM*, del qual conocemos los tres lados, es á saber *BF*, duplo de la excentricidad, *FM* media proporcional entre los dos semiexes, y *BM*, diferencia que vá de *FM* al exe mayor, porque las dos lineas *FM* y *MB* son iguales al exe mayor. (II. 288). Por consiguiente con resolver el triángulo *BFM* se sacará el ángulo *F*, el qual es la anomalía media del planeta al tiempo de la equacion máxima. Fig. 330.

Si el semiexe *CA* = 38710, y el semiexe conjugado = 37883, como en la órbita de mercurio, será *CF* = 7960, *BF* = 15920, *FM* será = 38294. De la resolucion del triángulo *BFM* sacarémos el ángulo *BFM* de 81° 4′ 52″, esta es su anomalía media al tiempo de la equacion máxima; de aquí se inferirá (878) la anomalía media 104° 45′ 41″; luego su diferencia, que es la equacion del centro, será

Fig. 330. 23° 40′ 49″, y esta ha de ser la equacion máxima de la órbita de mercurio.

883 Ahora declararémos como se observa la equacion. Si se conocieren dos longitudes verdaderas de un planeta observado en *G* y *M*, discreparán una de otra la cantidad del ángulo *GFM*, que es la suma de las dos anomalías verdaderas; pero la suma de las dos anomalías medias *ABM*, *ABG* será mayor todo lo que monta el duplo de la equacion, pues cada distancia verdadera es menor que la distancia media, lo que monta la equacion máxima. Es facil de calcular en todos tiempos la suma de las dos anomalías medias, aunque no se conozca el lugar del afelio *A*, porque la suma de las dos anomalías medias es igual al movimiento medio del planeta, en el mismo intervalo de tiempo, y se halla con facilidad en conociendo lo que dura la revolucion. Por consiguiente el exceso del movimiento medio calculado respecto del movimiento verdadero observado, dá el duplo de la equacion máxima, con tal que las dos observaciones se hayan hecho en *M* y *G*, esto es, en los tiempos de la veloeidad media.

884 El movimiento verdadero será el mayor, si se toma la primera observacion antes del perihelio y la segunda despues, como en el exemplo que propondrémos muy en breve.

885 Para conocer los tiempos y las observaciones que influyen en esta investigacion, un observador que de ningun modo conociera la situacion de la órbita del planeta y de los puntos *G* y *M*, podría juntar muchas posiciones observadas, compararlas de dos en dos, y ver quanto el movimiento verdadero observado discrepaba del movimiento medio calculado para cada intervalo; la mayor de todas las diferencias le daría el duplo de la equacion máxima. Porque entre una distancia media y la otra, el movi-

vimiento verdadero discrepa del movimiento medio Fig.
á razon de la equacion sustractiva en la una y aditiva en la otra; luego si tuviésemos observaciones hechas en todos los puntos de la órbita, habria dos en las quales el movimiento verdadero será menor ó mayor que el movimiento medio, lo que vale el duplo de la equacion máxima. Como hoy dia se conocen, con muy corta diferencia, los lugares de los ápsides y de las distancias medias de todos los planetas, se pueden tomar desde luego las observaciones hechas antes y despues del afelio, el tiempo de la equacion máxima, como en el exemplo que sigue.

886 El dia 7 de Octubre de 1751, el lugar verdadero del sol observado por el *Abate la Caille*, antes del perigeo, en virtud de observaciones hechas por espacio de tres dias, y comparadas unas con otras, se halló de .... $6^s\ 13^\circ\ 47'\ 15''$

El dia 28 de Marzo de 1752, esta longitud verdadera era de 0 8 9 26

Luego la diferencia entre estas dos longitudes, ó el movimiento verdadero del sol era 5 24 22 11

Pero en este intervalo el movimiento medio debia ser por el cálculo. 5 20 31 43

Diferencia dupla de la equacion máxima 3 50 28

Cuya mitad es la equacion de la órbita 1 55 14

De muchas observaciones resulta que es de 1 55 32

887 Como se hallan rarísima vez dos observaciones hechas cabalmente en los puntos *M* y *G* de 330. la velocidad media, no se halla por lo regular en el primer cálculo la cantidad cabal de la equacion máxima; pero en hallando, por lo que se dirá dentro de poco, con muy corta diferencia, la equacion y el lu-

Fig. lugar del ápside, se calcula para los dos tiempos de observaciones la equacion de la órbita, y tambien se calcula la máxîma (882); con esto se sabe quanto la equacion que dán las observaciones deberia discrepar de la máxîma. Por este camino halló *Mr. de la Caille* en el exemplo propuesto 18″, 6 que se habian de añadir para sacar el verdadero valor de la equacion máxîma, que resultaba de las dos observaciones.

888 Tambien se puede hallar la equacion máxîma sin conocer el ápside; basta tomar por época una longitud qualquiera y comparar con ella otras muchas longitudes para sacar el movimiento verdadero observado; y calculando para cada uno de estos intervalos el movimiento medio por la duracion conocida de la revolucion, saldrán diferentes aditivas, y diferencias sustractivas; la suma de la mayor diferencia aditiva y de la mayor sustractiva será el duplo de la equacion máxîma de la órbita, con tal que hayan sido bastantes las observaciones para que en ellas se hallasen los dos puntos de la equacion máxîma.

889 Una vez determinada por observacion la equacion máxîma, si de ella se quiere inferir la excentricidad, lo mas acomodado es hacer una regla de falsa posicion, ó suponer desde luego conocida la excentricidad que se busca, para inferir de ella la equacion máxîma (882). Si saliere mayor de lo que corresponde, se rebaxará algo de la excentricidad supuesta, y se hará otra vez el cálculo. Este método de determinar la excentricidad por medio de la equacion máxîma es en muchos casos mas acomodado que el que usó *Keplero* (864) para averiguar la excentricidad de marte.

De-

Fig.

Determinacion de los Afelios.

890 Hay muchos métodos para determinar el afelio de un planeta; darémos aquí el mas directo que sirve principalmente para el sol, y tambien se aplica á los planetas superiores. En conociendo muchas observaciones de un planeta, hechas en diferentes puntos de su órbita, y reducidas al sol, se buscarán las que dán las longitudes heliocéntricas diametralmente opuestas; y si los tiempos de estas observaciones discreparen cabalmente una media revolucion, será señal cierta de que la una de las dos observaciones está en el afelio, y la otra en el perihelio. Por consiguiente comparando de dos en dos muchas observaciones, será imposible errar las que señalaren el lugar de los ápsides.

Sea *A* el afelio de un planeta, y *P* el perihelio, 331.
la parte *ABP* de la elipse es igual á la parte *AFP*, ambas son andadas en el tiempo de una semirevolucion; v. gr. en $182^d\ 15^h\ 7'\ 40''$, quando se trata del sol. Aquí tomamos la revolucion anomalística (893), esto es, respecto del apogeo; pero en la primera aproximacion bastaría la revolucion trópica (810); suponiendo inmobil el afelio en el intervalo de una media revolucion.

Si se toma otro punto qualquiera *D* y el punto opuesto *E*, la parte *DFE* de la elipse necesitará menos tiempo que la parte *EBD*; porque en la primera está el perihelio, esto es, el parage donde el movimiento del planeta es mas rápido, siendo así que por el contrario la parte *EBD*, en la qual está el afelio, ha de ser andada con movimiento mas lento y en mas tiempo.

Por consiguiente, los puntos *A* y *P* de los dos ápsides son los únicos que, por estar diametralmente

Fig. opuestos respecto del focus de la elipse, forman tambien dos intervalos iguales de tiempo. Luego se hallarán indefectiblemente los puntos de los ápsides, si se hallan dos longitudes, las quales, siendo diametralmente opuestas como *A* y *P*, correspondan tambien á tiempos distantes uno de otro una media revolucion, esto es, la mitad del tiempo que necesita el planeta para volver á su ápside; bastará, pues, buscar entre muchas observaciones de un planeta, las dos que cumplieren á un tiempo con estas dos condiciones.

891 Tambien se puede determinar el afelio por medio de dos observaciones, que la una sea ácia los ápsides y la otra ácia las distancias medias, con tal que se suponga bien conocida la equacion del centro. Porque si se hace un supuesto para el lugar del afelio, y se convierten las dos anomalías verdaderas que resultaren en anomalías medias, no puede salir una diferencia que sea igual con el movimiento medio, conocido por otra parte, á no ser que se haya supue to el afelio en su verdadero lugar.

892 El tercer método para hallar el lugar del afelio de un planeta sirve para mercurio y venus. Supongo que se haya observado la digresion máxima de mercurio en el tiempo que está ácia las distancias medias del sol, quando el radio vector varía rápidamente. Si se conociere de antemano la distancia media y la excentricidad, se calculará facilmente el punto donde se debe colocar el afelio, para que el radio donde está el planeta, sea cabalmente tan largo como corresponde á la longitud observada.

331. Sea *F* el lugar de mercurio en su distancia media, visto desde la tierra por el rayo *TF*, el qual toca la órbita; siendo entonces el ángulo *STF* la digresion máxima, y *ASF* la distancia al afelio. Si en las tablas de que usa el calculador estuviesé mal señalado

el

el lugar del afelio, de modo que le señalasen en *C*, Fig.
adelantando el punto *C* á *A*, la linea *SF* llegaría á *SG*, y la elongacion de mercurio sería igual al ángulo *STG*, mayor por lo mismo que la elongacion *STF*. Por consiguiente, si el cálculo de las tablas diese una elongacion menor de lo que corresponde, bastará acercar el afelio al lugar de la observacion, dexando siempre á mercurio en la misma longitud ó en la misma linea *SF*, ó, si se quiere, guardando la misma longitud media.

893 La revolucion de un planeta respecto de su ápside, el tiempo que gasta en volver á este punto de su órbita, ó el intervalo entre un paso por su afelio y el paso siguiente, se llama la *revolucion anomalística*, porque la anomalía vuelve á empezar á cada paso por el ápside: esta revolucion anomalística es algo mas larga que la revolucion respecto de los equinoccios, porque el movimiento de los ápsides sigue el orden de los signos.

Nudos é inclinaciones de los planetas.

894 Quando un planeta visto desde la tierra no tiene ninguna latitud, tampoco la tiene visto desde el sol, y entonces está en su nudo (834), pues está en el plano de la eclíptica; basta, pues, observar la longitud geocéntrica del planeta, al tiempo que no tiene ninguna latitud, de esta observacion se inferirá su longitud vista desde el sol (849), y este será el lugar del nudo.

Igualmente se puede sacar el lugar del nudo por observaciones hechas á iguales distancias de los nudos, quando la latitud heliocéntrica de un planeta se hallare una misma; porque, si se toma un medio entre las longitudes halladas en ambos casos, ese será el lugar del nudo, suponiéndole fixo en el intervalo de las dos observaciones.

Ee 2 El

Fig. 895 El nudo de mercurio y el de venus se determinan mediante sus pasos por el sol, los quales se verifican indispensablemente muy cerca de sus nudos.

896 Desde que se observan con alguna prolixidad los nudos de los planetas, se ha notado que todos tienen un movimiento retrogrado, insensible en el discurso de algunos años, pero sensible al cabo de un siglo.

897 La *inclinacion* de un planeta es el *ángulo* que el plano de su órbita forma con el plano de la eclíptica; la latitud heliocéntrica (846) del mismo planeta, quando está á 90° de sus nudos, es igual con esta inclinacion, porque entonces está el planeta tan lexos como puede del plano de la eclíptica. Por consiguiente, para averiguar la inclinacion de una órbita basta observar la latitud del planeta, quando está á 90° de los nudos, y reducir esta latitud observada ó geocéntrica, á la latitud heliocéntrica ó vista desde el sol.

898 Pero como esta última reduccion supone determinada la paralaxe de la grande órbita, se escusa esta averiguacion practicando el método siguiente. Se busca el tiempo en que el sol está en el nudo del planeta, esto es, en que nos parece á la misma longitud que el planeta quando está en su nudo; porque entonces la tierra pasa á *T* por la linea de los nudos *NST*, y con esto sale muy sencillo el cálculo de la inclina-
332. cion. Supongamos desde luego que el planeta se halle entonces en el punto *A* de su órbita, y que se baxe la perpendicular *AB* al plano de la eclíptica, ó de la órbita de la tierra prolongada hasta cerca del planeta; que la linea *TB*, la qual señala su lugar reducido á la eclíptica sea perpendicular á la linea *TSN* en la qual están el nudo y el sol, siendo de 90° el ángulo de elongacion *BTS*; entonces las lineas *AT* y *BT* son perpendiculares á la seccion comun *TN*

la,

la una en el plano de la órbita, y la otra en el plano Fig.
de la ecliptica, formarán, pues, una con otra el mis- 332.
mo ángulo que los dos planos; esto es, un ángulo igual á la inclinacion que se busca. Pero el ángulo *ATB* es la latitud misma del planeta vista desde la tierra (835); luego *la latitud observada será la inclinacion misma de la órbita.*

Pero como sucede pocas veces que el sol esté en el nudo, y el planeta á 90°. del sol á un mismo tiempo, cuya última circunstancia solo se verifica en los planetas superiores, hemos de apelar á una regla más general para determinar las inclinaciones.

899. Supongo que se ha observado la latitud de un planeta, vista desde la tierra, sea la que fuere, con tal que el sol esté en el nudo ó poco falte. Sea *P* el planeta en un punto qualquiera *P* de su órbita, estando siempre la tierra en *T* en la linea de los nudos *TSN*; se baxará la perpendicular *PL* desde la órbita del planeta al plano de la ecliptica: desde los puntos *P* y *L* se tirarán las perpendiculares *PR* y *LR* á la seccion comun de los dos planos; el ángulo *PRL* de las dos perpendiculares será igual al ángulo de los dos planos, esto es, á la inclinacion de la órbita respecto del plano de la ecliptica; el ángulo *LTP* será igual á la latitud geocéntrica del planeta, y el ángulo *RTL* igual á la elongacion del planeta (849). La propiedad (I.720 y 725) de los triángulos rectilineos *RTL* y *PTL* rectángulos en *R* y *L* dará estas dos proporciones

$TL : RL :: R : \text{sen}\, RTL$, y
$TL : PL :: R : \text{tang}\, LTP$, ó alternando (I.725)
$TL : R :: RL : \text{sen}\, RTL$
$TL : R :: PL : \text{tang}\, LTP$; luego
$RL : PL :: \text{sen}\, RTL : \text{tang}\, LTP$,

Pero del triángulo rectángulo *PRL* rectángulo en *L* sacamos esotra proporcion

Fig. 332. $RL : PL :: R : \text{tang } PRL$; luego comparando esta con la última que hemos sacado últimamente, tendremos

sen RTL : tang LTP :: R : tang PRL, ó
sen RTL : R :: tang LTP : tang PRL;

y quiere decir que *el seno de la elongacion es al radio, como la tangente de la latitud geocéntrica observada es á la tangente de la inclinacion.*

900. Quando se determina el lugar del nudo de un planeta por dos latitudes iguales (894), ora se tomen estas latitudes antes y despues del paso de un planeta por sus límites, ora se tomen antes y despues del paso por el nudo, las mismas observaciones pueden determinar á un tiempo no solo el nudo, mas tambien la inclinacion de la órbita. Porque en el triángulo esférico PAL rectángulo en L conocemos los lados LA, PL, (esto es la distancia al nudo, y la latitud vista desde el sol) y buscarás (1879. E) el ángulo A, y quedará determinada la inclinacion verdadera de la órbita.

901 Este método por el qual se determinan á un tiempo el nudo y la inclinacion de un planeta no es tan exácto como el otro por el qual se determina separadamente cada una de las dos cosas, por medio de una observacion hecha en el nudo para determinar el nudo, y de una observacion hecha en los límites para determinar la inclinacion de la órbita. Porque si las dos observaciones correspondientes están cerca del nudo, determinan mal la inclinacion de la órbita; pues entonces la latitud es corta, y no se debe determinar una cantidad mayor por otra menor. Y por el contrario, si las dos observaciones están muy lexos del nudo, son poco á propósito para determinar su posicion, porque como la variacion de latitud de un dia para otro es poco reparable, la mas leve equivocacion en la latitud causa una muy notable en el nudo.

De

Fig.

De los diámetros de los planetas.

El diámetro aparente de un planeta es el ángulo baxo el qual se ve, valuado en minutos y segundos; es el ángulo cuya cuerda ó subtensa es tomada por radio la distancia del planeta á la tierra. 333.
Sea T la tierra, donde está el observador; AB el diámetro de un planeta; TA y TB, los rayos visuales tirados desde la tierra á los limbos opuestos del disco del planeta; el ángulo ATB es el diámetro aparente del planeta.

Los diámetros de los planetas se determinan por el tiempo que tardan en atravesar el meridiano. Porque si se observa con un anteojo el instante que el primer limbo del sol está en el meridiano, ó en el hilo perpendicular á la direccion de su movimiento, y su segundo limbo llega al mismo hilo dos minutos mas tarde, estos dos minutos de tiempo señalarán que el diámetro del sol es de 30', en el supuesto de que esté en el equador. Quando no está en el equador, se ha de rebaxar de la cantidad hallada otra que vamos á determinar.

Un arco tirado dentro de un ángulo muy pequeño esférico perpendicularmente á sus lados, es igual al mismo ángulo multiplicado por el seno de la distancia del arco al vértice del ángulo.

Supongamos dos círculos máximos EAD, EBC, 334.
que causan uno con otro un angulillo en E; que ED sea de 90°, por manera que CD sea la medida del angulillo E; que á una distancia qualquiera del vértice E se tire un arco de círculo máximo AF, perpendicular á EAD, y bastante chico para que se le pueda tomar por una línea recta, y que al mismo tiempo EF sea sensiblemente igual á EA. El triángulo EFA rectángulo en A y F, nos dará esta pro-

 por-

Fig. porcion (II. 707): el radio es al seno de la hypotenusa EF, como el seno del angulillo E es al seno del arco chico FA, ó como el ángulo E es al arco FA (por ser los arcos pequeños iguales con sus senos), ó como el arco DC es al arco FA. Tomando, pues, la unidad por radio ó seno total, tendremos $1 : \text{sen}\, AE :: DC : FA$, por suponerse $EF = AE$, luego $FA = DC \cdot \text{sen}\, AE$.

904 Síguese de aquí 1.º que las distancias FA, DC entre dos círculos, son como los senos de las distancias al vértice EA, ED; 2.º que un arco pequeño del equador qual es DC, una corta diferencia de ascension recta multiplicada por el coseno de la declinacion AD del astro que se observa, dará el efecto que resulta en la region del arco, ó el arco pequeño FA que allí mismo está comprehendido entre los dos círculos de declinacion. Considérese que por ser $ED = 90°$, $\text{sen}\, AE = \cos AD$.

De la rotacion de los cinco planetas.

905 Mercurio está siempre tan cerca del sol y tan envuelto en los vapores del orizonte, que no se pueden reparar manchas en su disco de modo que nos dén á conocer quanto dura su rotacion.

La de venus dura 23 horas, segun *Casini*.

La de marte dura $24^h\ 39'$.

La de júpiter dura $9^h\ 56'$. Este planeta es algo aplanado; y de las observaciones mas recientes se deduce que su exe es al diámetro de su equador como 13 á 14.

La mucha distancia á que está saturno de nosotros, no nos dexa averiguar quanto dura su rotacion; hay quien dice que dura 10^h.

Fig.

Del Anillo de Saturno.

906 Al rededor de saturno hay un anillo muy delgado, casi plano, concéntrico con saturno, é igualmente distante de este planeta en todos sus puntos; le sostiene la gravedad natural y simultanea de todas sus partes, del mismo modo que se sostendría una puente de suficiente extension para dar la vuelta á la tierra.

907 El diámetro *AB* del anillo de saturno es al del globo de saturno *CD*, como 7 á 3; el espacio *E*, que hay entre el globo y el anillo, viene á ser igual al ancho del anillo. Está inclinado á la eclíptica 31° 23′ y la corta á 5ˢ 17° de longitud. Este anillo se desaparece á veces. 335.

DE LOS PLANETAS SECUNDARIOS.

908 Entre los planetas secundarios la luna ocupa el primer lugar.

De la Luna.

La teórica de este satélite es de mucha importancia, y dá muchísimo exercicio á los mas laboriosos y profundos Matemáticos de este siglo.

De las Fases de la Luna.

909 Llamamos *fases de la luna* las mudanzas que reparamos en su figura. Despues de desaparecerse algunos dias vuelve á dexarse ver por la tarde ácia el occidente, poco despues de puesto el sol, en forma de un filete de luz ó de *creciente*, cuya luz es débil, porque la debilita el resplandor del crepúsculo.

Al

Fig. Al dia siguiente se vé la luna á la misma hora elevada sobre el orizonte y por consiguiente mas apartada del sol; su creciente es mayor, se la vé mas facilmente y mas tiempo. La luna se vá apartando cada dia mas del sol, adelantándose ácia el oriente, su luz vá tomando mas cuerpo, y ácia el sexto dia se la vé cabalmente en forma de un semicírculo, y se dice que entonces la luna es *dichotoma*, ó está en *quadratura*, ó en su *primer quarto*.

La luna prosigue apartándose ocho dias del sol, y crece su luz hasta que al cabo de dicho tiempo se la vé perfectamente redonda, su disco alumbrado resplandece toda la noche, y este es el dia de *la luna llena*, ó de la *oposicion*. Se la vé pasar por el meridiano á media noche, y ponerse así que nace el sol; todo lo qual manifiesta que entonces está directamente opuesta al sol respecto de nosotros.

Despues de la luna llena viene el menguante que dá las mismas fases y las mismas figuras que el incremento. Primero se la vé ovalada, despues dichótoma ó en forma de semicírculo, y este es el *último quarto*.

Luego despues mengua el semicírculo de luz, y se transforma en creciente que vá siendo cada dia mas angosta, y cuyos cuernos siempre están del lado mas distante del sol. Entonces ha dado la luna la vuelta al cielo, y se acerca al sol; se la vé nacer por la mañana antes que nazca el sol, con la misma forma que tenia el primer dia de la observacion. Finalmente, se arrima mas al sol hasta perderse en sus rayos, y esto se llama la *luna nueva* ó la conjuncion.

910. De una luna nueva á otra hay un intervalo de unos 29 dias y medio; esto es lo que llamamos *mes lunar ó lunacion ó revolucion synódica de la luna*.

911. Los primeros hombres que observaron con puntualidad las fases de la luna, repararian naturalmente que los eclipses de sol que hay por lo menos to-

G H S
B D
Z
P 320
C A
B S
N
H G
B A
E 319
F
C P D
M
p P
N A C
t O L
321 B
*F
324
K
S
L
A
P
C
B S R
E
M
325
T
S
E D
326
G F
A
F
S
P
330 A
B
D E
C
M G
O
R F
N
C A D 331
B
F G
S
E P
T
B
F
334 A E
A C DE B
335

todos los 4 ó 5 años suceden entre la última creciente de una revolucion concluida, y la primera fase de una luna nueva, esto es, entre el tiempo que la luna está mas cerca del sol y el tiempo que empieza á apartarse ácia el lado opuesto. Entonces se vé sobre el sol un cuerpo redondo y totalmente negro, se le vé ir pasando poco á poco por delante del disco del sol, obscureciendo, en parte por lo menos, su luz; y á veces ponerse enmedio de su disco, donde se vé rodeado de una corona de luz; otras veces cubrirle enteramente y dexarnos á obscuras. Fig.

Era natural que los primeros observadores se hiciesen cargo de que este cuerpo obscuro no podia ser otra cosa que la luna, la qual los dias antes habian visto que se iba acercando al sol, y que dos ó tres dias despues vían del otro lado ó al oriente del sol, del qual se apartaba con igual velocidad.

912 Despues de haber interceptado de dia la luz del sol, parecia la luna enteramente negra y opaca; y esto dió á entender que solo resplandecia en quanto era alumbrada, y que su lado vuelto ácia nosotros en tiempo de una eclipse de sol no recibia ni podia darnos luz alguna. Creyóse, pues, que la luna era un globo opaco y macizo que no lucia por sí, sino de prestado y del lado que el sol alumbraba. Se notaba tambien que la luna era mas resplandeciente que nunca quando estaba opuesta al sol, de modo que se vía de cara, y rechazaba ácia la tierra toda la luz con que el sol bañaba su cara ó su disco.

913 Catorce ó quince dias despues de un eclipse de sol, suele suceder un eclipse de luna. Antes que empiece se vé la luna llena, redonda, luminosa y opuesta al sol; nace por la tarde en el mismo instante que el sol se pone, está toda la noche sobre el orizonte; este es el tiempo de la *oposicion* ó de la luna llena (909); pero dentro de poco pierde la luna esta

gran

Fig. gran luz y se desaparece, se repara que la tierra puesta entre la luna y el sol estorva que este astro ilumine la luna.

914 Aunque el sol alumbre constantemente la mitad del globo lunar, no podemos ver la luna llena sino quando vemos esta mitad alumbrada, y la vemos toda entera. Si estamos puestos de lado, de modo que solo podamos ver la mitad de la parte alumbrada, esto es, del emisferio que está de cara al sol, veremos la mitad no mas de lo que viamos al tiempo de la luna llena, quiero decir, que no veremos mas que un semicírculo de luz. La luna nos parecerá en quarto, y esto dá á entender lo que sucederá en las demas situaciones. Esta es la causa de las fases de la luna, y procuraremos darlas mas á conocer.

336. Sea *S* el sol; *T*, la tierra al rededor de la qual gira la luna en su órbita; *EO*, el globo de la luna puesto entre la tierra y el sol, esto es, en *conjuncion*, ó al tiempo de la luna nueva; entonces el sol no alumbra mas que la parte *E*; y para nosotros, que estamos en *T*, no hay mas parte visible que *O*. Por consiguiente el *emisferio alumbrado* es cabalmente el que no vemos, y el emisferio visible es el que el sol no alumbra. Esta es la causa por que no vemos la luna ácia el tiempo de la luna nueva (909).

336. Al contrario, quando la luna está opuesta al sol, el emisferio alumbrado *L* es cabalmente el que vemos, porque estamos del mismo lado que la antorcha que la alumbra, y no se pierde nada de la luz que la luna rechaza ácia nosotros; su disco visible *L* es el mismo que su disco alumbrado; esta es la razon por que vemos la luna llena, esto es, redonda y luminosa quando está en *oposicion*.

915 Quando la luna dista unos 90° del sol, ó está casi á la mitad del camino que hay desde *O* á *L*, ó desde la conjuncion á la oposicion, el emisferio visible

ble es *AQZ*; el emisferio que el sol alumbra es *MZQ*. Por consiguiente solo vemos la mitad de este emisferio alumbrado, el qual se dexaba ver entero y como un círculo cabal al tiempo de la oposicion; no vemos, pues, mas que un semicírculo de luz, qual está pintado separadamente en *N*; estando siempre del lado del sol la redondez luminosa. Fig.

916. Quando la luna está á 45° del sol, decimos que está en su *primer octante*, entonces la parte alumbrada, la que está vuelta al sol es *CDF*, la parte visible es *BCD*. Por consiguiente solo vemos la parte *CD* del emisferio alumbrado. Entonces la luna parece en forma de un creciente, qual se vé en *G*, no vemos mas que la octava parte del globo lunar, y la luna dista del sol la octava parte de un círculo, y esta es la razon porque esta fase se llama un *octante*; esta parte alumbrada será como la séptima parte no mas de su disco visible.

En el segundo octante, que es despues de la quadratura, el emisferio visible es *HIK*, el emisferio que el sol alumbra es *IKP*. Por consiguiente vemos toda la parte alumbrada á excepcion de la porcioncita *KP*; entonces vemos mas que la mitad del disco lunar, y la luna tiene la forma *R*. Lo que le falta á su círculo es la misma cantidad que la parte alumbrada en el primer octante, quando la luna estaba en *C*.

El tercer octante *V* que sucede 45° mas allá de la oposicion es parecido al segundo octante; y el quarto octante *T* es parecido al primer octante *G*. 336.

917 Para calcular puntualmente la parte luminosa y visible del disco lunar, sea *S* el sol; *T*, el centro de la tierra; *C*, el centro de la luna; *AE*, el diámetro de la luna, perpendicular al rayo solar, el qual separa la porcion alumbrada *ANE*, de la porcion obscura *ADE*. El diámetro lunar *ND* perpendi- 337.

Fig. dicular al radio *TC* de la tierra, separa la parte visible *DAN* de la parte invisible *DEN*. Desde el extremo *A* del semicírculo iluminado *ENA* se baxará una perpendicular *AB* al diámetro *ND* de la luna, y la linea *NB* será el anchor aparente de la parte visible del misferio iluminado. Porque, de todo el emisferio iluminado *ANE* solo la parte *AN* está en el emisferio visible *DAN*, y el arco *AN* no puede tenèr á nuestra vista mas ancho que *BN*, por la misma razon que el semicírculo entero *NAD* no parece mas que un simple diámetro *NBD*, y un emisferio entero no parece mas que el círculo ó plano que es su proyeccion. La porcion *NB* del diámetro visible *NBCD* es el seno verso del arco *NA*; este arco *NA*, ó el ángulo *NCA*, es igual al ángulo *CTF*, suponiendo *TF* paralela á *CS*. Porque este ángulo *NCA* es el complemento del ángulo *FCT*, por ser recto el ángulo *NCT*; pero el ángulo *FCT* es el complemento del ángulo *FTC*, por ser rectángulo el triángulo *TFC*; luego el ángulo *NCA* coge el mismo número de grados que el ángulo *FTC* (I. 342). Este ángulo *FTC* es igual á la elongacion de la luna ó á la distancia de la luna al sol, porque se supone que el sol está en la linea *TF* igualmente que en la linea *CS*, por ser prodigiosa la distancia del sol en comparacion de *CF*. Luego el arco *NA* es igual á la elongacion de la luna; luego en las diferentes fases de la luna *el anchor del segmento iluminado de la luna, es igual al seno verso del ángulo de elongacion*, tomando por radio el radio mismo del disco lunar, ó la semisuma de sus cuernos. V. gr. quando la luna, quatro ó cinco dias despues de su conjuncion, está á 60° del sol,
338. su parte luminosa *NB* parece la mitad del radio *NC*, ó la quarta parte de todo el diámetro *ND* de la luna; porque el seno verso de 60° en todo círculo es la mitad del radio del mismo círculo (I. 490 y 494).

Si

Si el círculo lunar está figurado en el círculo *GNH*, Fig.
cuyo centro sea *C*, y *NB* es igual á la mitad del radio *CN*, será *NB* el ancho del creciente de la luna á 60° de elongacion.

918 Las consideraciones antecedentes hacen patente que no es cabalmente el seno verso de la elongacion, antes sí el seno verso del ángulo exterior del triángulo que forman en el centro de la luna rayos que ván al sol y á la tierra. Porque en la demostracion antecedente hemos supuesto, que las lineas *CS* y *TF* tiradas al sol, sea desde la tierra ó desde la luna, eran sensiblemente paralelas; esto solo es verdad por razon de la inmensa distancia del sol que está 400 veces mas lexos de nosotros que la luna. Pero si los rayos *ST* y *SV* que ván desde el sol *S* á 339.
la tierra *T* y al planeta no son paralelos, el ángulo exterior *TVO* del triángulo *SVT* será igual al ángulo *NVA*; por ser cada uno de ellos el complemento del ángulo *AVT*. Pero la parte alumbrada y visible *NB* es igual al seno verso del ángulo *NVA*; luego el diámetro entero es al anchor de la parte alumbrada y visible de un planeta, como el diámetro del círculo es al seno verso del ángulo en el centro del planeta, exterior al triángulo formado en el sol, en la tierra y en el planeta.

919 Se vé distintamente despues de la luna nueva que el creciente, esto es, su parte mas luminosa, vá acompañado de una luz debil en todo lo restante del disco, que nos dexa ver toda la redondez de la luna, y se llama *la luz cenicienta*. Esta luz proviene de la que la tierra reflecte ácia la luna.

Porque como la luna es mucho menor que la tierra, la luz que de rechazo le envia la tierra ha de ser mucho mayor que la que ella rechaza ácia la tierra, y por lo mismo no es de extrañar que la luna pueda reflectirla hasta nosotros; y que por su medio se nos ha-

Fig. hagá visible la luna. Viéramosla toda entera quando está en conjuncion, á no ser que el sol que vemos al mismo tiempo sorbe enteramente ésta vislumbre terrestre que baña el globo lunar, y nos impide ver la luna; pero así que el sol está puesto y casi acabado el crepúsculo, percibimos muy distintamente la luz cenicienta.

Esta luz causa otro fenómeno muy notable, y es la dilatacion aparente del creciente luminoso, que parece ser de un diámetro mucho mayor que el disco obscuro de la luna. Esto proviene de que si se pone una luz muy viva al lado de otra debil, la primera borra y sorbe la otra; el creciente parece abultado con un desparramamiento de luz que se hace en la retina, y ensancha el disco lunar; el ayre ambiente alumbrado de la luna coadyuva á esta ilusion.

920 La luz de la luna no dá calor alguno; consta de muchos experimentos, y particularmente del de la *Hire*, individuo de la Real Academia de las Ciencias de París, quien juntó por medio de un espejo cóncavo los rayos lunares en un espacio 300 veces menor que el que cogian en el estado natural, sin que causasen efecto alguno en un termómetro sumamente sensible.

Tambien consta que la luz de la luna es 300 mil veces mas debil que la del sol.

De las desigualdades de la luna.

921 Los primeros observadores tardarían poco en reparar que en el discurso de 59 dias habia dos veces luna nueva, de modo que la duracion de una lunacion era de 29 dias y medio. Esta regla que discrepaba poco de la verdad, padecia muchas excepciones que solo el discurso del tiempo podia manifestar.

Me-

922 *Meton* fué el primero que dió á conocer con Fig.
alguna puntualidad, 430 años antes de Christo, el movimiento de la luna. Habia reparado que en 19 años solares habia 235 meses lunares cabales; y esta determinacion solo se aparta de la verdad un dia en 312 años. Túvose por tan portentoso este descubrimiento en Grecia, que los cálculos se grabaron con letras de oro; sirve todavía en el Kalendario, y se llama *ciclo lunar* la revolucion de 19 años, al cabo de la qual las lunas nuevas suceden en los mismos dias del año civil. El *número aureo* es el que señala el año del ciclo lunar; se señala con 1, siempre que la luna nueva es el dia 1 de Enero; como en 1767.

923 Este periodo manifiesta que el regreso de la luna á su conjuncion tarda 29 dias 12 horas 44 minutos 3 segundos, y se llama *lunacion*, *mes synódico*, ó *revolucion synódica*. Para que la luna, despues de concluida una revolucion en su órbita, alcance al sol, tiene que andar todavía los 29° que el sol ha andado en la eclíptica con su movimiento anuo; por consiguiente quando la luna ha alcanzado al sol, ha mas de dos dias que su revolucion verdadera está concluida, y esta solo dura $27^d\ 7^h\ 43'\ 4''\frac{1}{2}$, y se llama *revolucion periódica*.

924 Las desigualdades de la luna alteran mucho la uniformidad de esta revolucion media que acabamos de determinar. Los que observaron cada dia el lugar de la luna por espacio de un mes, repararon que al cabo de siete dias habia como unos seis grados de desigualdad, que al cabo de 14 dias la desigualdad se desaparecia, y que al cabo de 21 dias volvia en direccion contraria, para desaparecerse al cabo de los 27 dias de la revolucion.

925 Pero despues de hacer estas observaciones en diferentes meses y diferentes años, se echó de ver que los puntos del cielo donde la desigualdad se desapa-

Fig. recia (881), esto es, el apogeo ó el perigeo, no eran unos mismos, y que en el discurso de cada revolucion andaban como unos 3 grados. Con efecto, el apogeo de la luna dá la vuelta al cielo en 3231^{d} 8^{h} $34'$ $57''\frac{1}{2}$ respecto de los equinoccios, y en 3232^{d} 11^{h} $14'$ $31''$ respecto de las estrellas, las quales vienen á ser 9 años.

Por estar la luna mas lexos de nosotros en su apogeo, su diámetro aparente es entonces menor, y no es mas que de unos $29'\frac{1}{2}$; catorce dias despues se le vé en un ángulo de $33'\frac{1}{2}$, quando la luna es perigea. Esto basta para manifestarnos quando la luna está en sus ápsides; la observacion del diámetro de la luna nos manifiesta tambien el punto de su apogeo en el cielo, y basta para darnos á conocer todas sus variaciones y su revolucion.

926 La primera desigualdad ó la equacion de la órbita de la luna es á veces de 5°, á veces de $7^{\circ}\frac{2}{3}$, conforme sea la situacion del sol respecto de la luna y de su apogeo, como si la órbita de la luna se prolongara y se hiciera mas excéntrica siempre que el sol corresponde al apogeo ó perigeo de la luna. Para expresar esta diferencia los Astrónomos suponen primero la equacion media de la órbita de 6° $18'\frac{1}{4}$; y se valen de otra equacion de 1° $20'\frac{1}{2}$, llamada segunda desigualdad ó *eveccion*.

927 La tercera desigualdad de la luna se llama *la variacion*; es de 37', y varía cada tres ó quatro dias, porque es nula en las lunas nuevas, en las lunas llenas y las quadraturas, es máxima en los octantes.

928 La quarta desigualdad es la *equacion anua* de la luna. Esta equacion no es mas que de $11'\frac{1}{4}$.

De

Fig.

De los nudos é inclinacion de la órbita de la Luna.

929 La órbita de la luna está inclinada á la eclíptica, y por consiguiente la luna atraviesa la eclíptica dos veces en cada revolucion, y siete dias despues de atravesar la eclíptica en el uno de sus nudos, se aparta 5 grados. Si no fuera por esta inclinacion, habria cada mes un eclipse de sol el dia de la conjuncion, y un eclipse de luna el dia de la oposicion. Pero hay años en que no hay ningun eclipse de luna, como en 1763, porque en el instante de cada oposicion la luna está muy apartada de su nudo, y se halla por consiguiente mas arriba ó mas abaxo de la eclíptica donde permanecen constantemente el centro del sol, y la sombra de la tierra.

930 Esta inclinacion que no pasa de 5° en las lunas nuevas ó las lunas llenas que suceden á 90° de los nudos, es de 5° 17′ ½ en las quadraturas; la inclinacion media es de 5° 8′ 46″.

931 El *nudo ascendiente* de la luna, ó el nudo donde atraviesa la eclíptica para acercarse al norte, se llama *la cabeza del dragon* y se señala así ☊; el nudo descendiente ó *la cola del dragon* se señala ☋.

932 Lo que es mas digno de notarse acerca de los nudos de la luna, es la rapidez de su movimiento: si la luna atraviesa la eclíptica en el primer punto de aries ó en el punto equinoccial, diez y ocho meses despues la corta al principio de piscis, quiero decir que su nudo ha retrocedido 30° ó todo un signo, y dá la vuelta al cielo en 18 años. Despues de observado muchas veces el regreso del nudo de la luna á un mismo punto del cielo, se ha averiguado que los nudos de la luna dán una vuelta entera contra el orden de los signos en 18 años comunes y 228 dias, ó en 6798^{d} 4^{h} 52′ 52″, 3 respecto de los equinoccios; y

 en

Fig. en 6803^d 2^h 55′ 18″, 4 respecto de las estrellas.

Del diámetro de la luna.

933 El diámetro aparente de la luna varía como la paralaxe, conforme varía su distancia á la tierra; el mayor diámetro perigeo es de 33′ 34″ en sus oposiciones, y el diámetro menor, quando la luna es apogea y en conjuncion, no pasa de 29′ 25″.

Para medir el diámetro de este planeta, basta observar el tiempo que el disco de la luna tarda en atravesar el hilo de un anteojo, quando es luna llena, y se ven los dos limbos (902); pero es preciso llevar en cuenta el atraso diurno de la luna por razon del qual gasta mas tiempo que el sol en atravesar el meridiano, aun quando no es mayor su diámetro.

934 Quando la luna está mas cerca del zenit, tambien está mas cerca de nosotros; y su diámetro aparente parece mayor en la misma proporcion. Sea *T* el centro de la tierra; *O*, un observador en su super-
340. ficie; *Z*, la luna al zenit del observador; si la distancia *ZO* de la luna al observador es una 60ma parte menor que la distancia *ZT* de la luna al centro de la tierra, el diámetro aparente visto desde el punto *O* será una 60ma parte mayor que el diámetro visto desde el centro de la tierra (497).

935 Si la luna estuviere en *L*, de modo que su altura respecto del orizonte sea igual al ángulo *LOH*, siendo su distancia al zenit igual al ángulo *LOZ*, se echa de ver que la distancia *LO* será menor que la distancia *LT* al centro de la tierra. No hay sino un caso donde este aumento es nulo, y es quando la luna esté en el orizonte mismo *H*; porque entonces estará casi igualmente distante del punto *O* que del punto *T*. Esta es la razon por que se llama *diámetro orizontal* de la luna el que se vé desde el centro de la tierra,

por-

porque es tambien igual al diámetro que observamos Fig.
quando la luna está en el orizonte.

936 Una vez conocido el diámetro orizontal de la luna, es facil de hallar el *diámetro aumentado* por razon de la altura respecto del orizonte, pues están uno con otro (497) como el lado *LO* es al lado *LT*. En el triángulo *LOT*, el ángulo *OLT* es lo que llamamos *paralaxe* de altura (735); el ángulo *LOZ*, ó su suplemento *LOT*, que tiene el mismo seno, es la distancia aparente al zenit; el ángulo *LTO* es la distancia verdadera de la luna al zenit, vista desde el centro de la tierra, ó el complemento de la altura verdadera; y como *LO* : *TL* :: sen *OTL* : sen *LOT* (I. 731), síguese que el diámetro orizontal es al diámetro aparente, como el seno de la distancia verdadera de la luna al zenit, vista desde el centro de la tierra, es al seno de la distancia aparente de la luna al zenit, vista desde el punto *O*.

937 Si á pesar de todo esto la luna se nos figura mayor quando está en el orizonte, esta apariencia es efecto de una ilusion óptica, cuya causa hemos insinuado en otro lugar.

De la paralaxe de la luna.

938 Para averiguar esta paralaxe supondremos dos observadores muy distantes uno de otro que observan á un tiempo la altura de un astro en el meridiano. Supondremos (y este es el caso mas sencillo) 340.
un observador en *O*, y otro en *D*, distante del primero la cantidad *OD* igual con poca diferencia á un quadrante de la tierra. Estando el primero en *O* observaría un astro *H* en el orizonte; estando el segundo en *D* le observaría en su zenit; en este caso el ángulo *OHT*, esto es, la paralaxe orizontal, sería igual al ángulo *HTE*, esto es, al complemento del ar-

Fig. co *OD*, distancia de los dos observadores, ó diferencia de sus latitudes; porque los suponemos en un mismo meridiano.

Sucede pocas veces que las circunstancias locales proporcionen en la práctica un caso tan sencillo como este; veamos, pues, como se averigua la paralaxe quando los dos observadores están á una distancia qualquiera uno de otro, y observan el astro á una altura qualquiera.

341. 939 Supongamos un observador *B* en Berlin, y otro *C* en el Cabo de Buena-Esperanza; *L*, la luna que ambos observaban al mismo tiempo en el meridiano (no es necesario que la observen en un mismo instante, con tal que se sepa quanto varía la altura meridiana en el intervalo de los dos pasos); *CLT* es la paralaxe de altura respecto del cabo; *BLT*, la paralaxe de altura respecto de Berlin, la suma de estas dos paralaxes es el ángulo *CLB*, diferencia total entre las posiciones de la luna, vistas por los dos observadores, ó argumento total de la paralaxe orizontal; sería su diferencia si ambos observadores tuviesen el astro al sur ó al norte. Una vez determinadas las paralaxes de altura respecto de dos lugares qualesquiera, es facil de determinar la paralaxe orizontal, pues no falta sino dividir cada una por el coseno de la altura observada (738); solo se trata, pues, de dividir el efecto total *CLB* en dos partes que sean una con otra como los cosenos de las alturas, y dividir cada una de estas dos partes por el coseno de la altura que le corresponde. Por este método ha averiguado *Mr. de la Lande* que observaba la luna en Berlin al tiempo que el *Abate la Caille* la observaba en el Cabo de Buena-Esperanza, que la paralaxe de la luna en las distancias medias es de 58′ 3″, bien que varía. La paralaxe máxima de la luna, quando está en su perigeo y en oposicion, es de 61′ 25″, la mínima

pa-

paralaxe que se verifica en el apogeo en conjuncion, Fig.
es de $53' 53''$, á la latitud de París. El aplanamiento de la tierra es causa de que hay $9''$ mas debaxo del equador, y $7''$ menos debaxo de los polos, por manera que la paralaxe equatorial lleva $16''$ de exceso á la paralaxe polar de la luna.

Por el mismo método se ha sacado que la paralaxe del sol, es de $10''$ no mas; pero el paso de venus por el sol observado en 1769 ha manifestado que esta paralaxe no pasa de $8''\frac{1}{2}$; de donde se sigue que el sol está 400 veces mas lexos de nosotros que la luna, por ser su paralaxe 400 veces menor (739).

De los Satélites de Júpiter.

940 Lo primero que importa determinar acerca de estos satélites es el tiempo que duran sus revoluciones. Para esto conviene averiguar sus conjunciones, que los eclipses dán á conocer; porque quando un satélite está en medio de la sombra que júpiter arroja detrás de sí, es evidente que el satélite está en conjuncion con júpiter, pues está en la linea tirada desde el sol á júpiter. El intervalo de un eclipse á otro se llama *revolucion synódica.*

941 Llamamos *revolucion periódica* el regreso de un satélite al mismo punto de su órbita, ó al mismo punto del cielo visto desde júpiter, despues de andados 360°. Esta revolucion es algo mas corta que la revolucion synódica.

942 Despues de averiguadas las revoluciones de los satélites, conviene determinar sus distancias al centro de júpiter, midiéndolas al tiempo de sus elongaciones máximas. Basta medir la distancia de uno no mas, las distancias de los otros se sacarán por la ley de *Keplero* (865), y se cuentan en semidiámetros de júpiter. Y como el diámetro de júpiter visto

Fig. desde el centro del sol en sus distancias medias al sol, ó visto desde la tierra en sus distancias medias á la tierra es de $17'' \frac{1}{4}$, su semidiámetro será de $8'' \frac{5}{8}$. Si multiplicamos esta cantidad por las distancias expresadas en semidiámetros de júpiter, sacarémos las mismas distancias en minutos y segundos.

943 Si sumamos succesivamente las revoluciones de los satélites hasta que compongan una misma suma, sacarémos con corta diferencia los periodos siguientes:

247 revoluciones del	I	hacen	437^d	3^h	$44'$
123 revoluciones del	II	hacen	437	3	42
61 revoluciones del	III	hacen	437	3	36
26 revoluciones del	IV	hacen	435	14	16

Así en el discurso de 437 dias los tres primeros satélites vuelven á una misma situacion respecto unos de otros, con diferencia de 8'.

De las desigualdades de los satélites.

944 Todas estas desigualdades están individualizadas en el Tomo VII de mis Elementos. Aquí solo hablaré de la que tiene por causa la propagacion sucesiva de la luz (363).

342. Sea *S* el sol; *ABP*, la órbita de júpiter; *TVR*, la órbita de la tierra cuyo diámetro *TR* es de 69 millones de leguas. La luz que júpiter reflecte ácia nosotros necesita algun tiempo para venir desde *T* á *R*; á no ser así, sería infinita su velocidad; por consiguiente quando la tierra está en *T*, estando júpiter en oposicion, llega su luz á nuestra vista mas pronto que quando la tierra está en *R*, acercándose júpiter á su conjuncion. Se observó con efecto en el siglo pasado que los eclipses de los satélites sucedian como un quarto de hora mas tarde quando la tierra estaba en *R*, que quando estaba en *T*.

Es-

945 Esta desigualdad era muy reparable en el primer satélite; pero como la aberracion (776) prueba con evidencia la propagacion succesiva de la luz, se creyó, luego que se hizo este descubrimiento, que esta desigualdad era comun á todos los satélites, y lo ha confirmado la observacion. Fig. 342.

946 La velocidad con que los rayos de luz llegan desde el sol á nuestra vista, es tal que en el mismo tiempo la tierra anda en su órbita un arco de 20″ (779); pero la tierra anda un arco de 20″ en $0^h\ 8'\ 7''\ \frac{1}{3}$ de tiempo con corta diferencia; luego la luz gasta 8′ en venir desde el sol á la tierra. Quando la tierra estuviere en *R*, estando júpiter en conjuncion con el sol, esto es, en *A*, la luz gastará para venir hasta la tierra 16′ 15″ mas que quando la tierra estaba en *T*, y júpiter en oposicion en el punto *A*. Por consiguiente los eclipses de los satélites sucederán 16′ 15″ mas tarde en las conjunciones que en las oposiciones, y en los demas tiempos á proporcion.

947 En todo esto suponemos que esté júpiter en sus distancias medias; pero por causa de su excentricidad, suele padecer alguna variacion la equacion de la luz.

De los satélites de Saturno.

948 Los satélites de saturno son cinco. El primero y segundo apenas se distinguen con anteojos ordinarios de 40 pies, el tercero es algo mayor, á veces se le vé en todo el discurso de su revolucion, el quarto es el mayor de todos, y fué el primero que se descubrió, el quinto es mayor que los tres primeros, quando está en su digresion occidental, pero en otras ocasiones es menor, y se desaparece totalmente.

949 Las revoluciones de estos satélites ván señaladas en la tabla siguiente.

Sa-

Fig. 327.

Satélites.	Revolucion periódica.			
I	1^d	21^h	18′	27″
II	2	17	44	22
III	4	12	25	12
IV	15	22	34	38
V	79	7	47	0

Por lo que mira á sus longitudes y distancias de saturno, ván apuntadas en estotra tabla.

Tabla de las longitudes y de las distancias de los satélites de Saturno.

Satélites.	Longitud en 1760 segun *Casini.*			Movimiento diurno.				Dist. en semidiám. del anillo, segun *Bradley.*	Dist. en min. y seg. sacadas por la del quarto.
I	11^s	5°	41′	6^s	10°	41′	51″	2,097	0′ 43″½
II	9	10	18	4	11	32	5	2,686	0 56
III	4	25	57	2	19	41	25	3,752	1 18
IV	0	0	43	0	22	34	37	8,698	3 9
V	7	20	36	0	4	32	18	25,348	8 42½

DE LOS ECLIPSES.

950 Hay eclipses de sol quando en la conjuncion la luna nos tapa el sol, y eclipses de luna quando en la oposicion la tierra intercepta la luz con que el sol ba-

baña la luna, ó quando la luna entra en la sombra de la tierra. Fig.

Si la órbita de la luna estuviera en la eclíptica, habría eclipses en cada oposicion y conjuncion; peró como la órbita de la luna está inclinada 5° á la eclíptica (930), y solo la corta en los dos nudos, no puede haber eclipses sino quando la luna está cerca de los nudos, y bastante próxima á la eclíptica para podernos tapar el sol que nunca sale de la eclíptica, ó para entrar en la sombra de la tierra, que tambien està en el plano de la eclíptica.

951 Una vez que se conozca el lugar de los nudos de la luna, se busca en que meses del año el sol se halla en las inmediaciones de estos nudos, y los dias de la luna nueva y luna llena en los mismos meses, para ver si la latitud de la luna viene á ser de un grado, porque entonces es de presumir que habrá eclipse.

952 Para saber con certeza si habrá eclipse en un novilunio ó plenilunio, y calcular sus circunstancias, es indispensable saber la hora y el minuto de la conjuncion ú oposicion; esto es, el instante que el lugar de la luna calculado por las tablas, es el mismo que el del sol en la eclíptica; tambien se debe calcular la latitud de la luna para el instante de la conjuncion; el movimiento horario de la luna en longitud, y latitud, la paralaxe y los diámetros del sól y de la luna. Todos estos preliminares son indispensables.

953 Ademas de los movimientos de la luna en longitud y latitud, se ha de determinar la inclinacion de su órbita respecto de la eclíptica; primero la inclinacion de la órbita verdadera, despues la de la órbita relativa. Esto es indispensable para el cálculo de los eclipses de luna, y tambien para los del sol, quandó se quieren averiguar sus fases respecto de diferentes paises de la tierra.

Quan-

Fig. Quando se calcula una conjuncion de dos planetas, ó de un planeta con una estrella, un eclipse ó un *apulso*, basta considerar la cantidad que el uno de los dos astros se acerca al otro, ó el movimiento relativo. En un eclipse de sol v. gr. se pregunta con que velocidad y en que direccion la luna se acerca al sol; basta averiguar quanto la longitud del un planeta es mayor que la del otro en el discurso de una hora, y quanto en el mismo intervalo de tiempo la latitud del uno crece mas que la del otro. La conjuncion ó el eclipse no proviene del movimiento real total y absoluto de cada planeta, sí del exceso del movimiento del uno respecto del otro.

954 Se puede, pues, no llevar en cuenta el movimiento del uno de los dos planetas, con tal que se le dé al otro la diferencia de los dos movimientos; quiero decir que suponiendo solo se mueve el uno de los dos, se haga variar su longitud y latitud respecto del otro, lo mismo que varian en realidad en virtud del movimiento de ambos. Por este camino se hallará la conjuncion aparente de los dos astros, del mismo modo que si se atendiera al movimiento de ambos.

955 Así, para calcular una conjuncion de dos planetas, solo se atiende al movimiento relativo; esto es, al movimiento del uno respecto del otro, suponiendo que el último se está quedo. Esto supuesto, que simplifica el cálculo, no muda el estado de las cosas; porque si el un planeta camina 36′ por hora ácia el oriente, y el otro 2′ del mismo lado, es patente que no mudarán sino 34′ uno respecto del otro, y estarán á la misma distancia, que si estando el uno inmobil, el otro no anduviese mas que 34′. La distancia á que vemos los dos planetas, uno respecto de otro, es una linea recta, hypotenusa de un triángulo cuyos dos lados son la diferencia de longitud y la di-

diferencia de latitud. Por consiguiente esta distancia Fig.
siempre será una misma quando fueren unas mismas las diferencias de longitud y latitud, ora sea efecto de los dos movimientos, ora se considere como efecto del uno no mas.

956 Se podrá, pues, hacer un triángulo *MNO*, cuyos lados *MN* y *NO* sean iguales respectivamente á la diferencia de los movimientos horarios en longitud y latitud, el ángulo *OMN* será la inclinacion de la órbita relativa, y *MO* el movimiento horario en esta órbita relativa. Se podrá suponer que estando 343.
el sol fixo en *M*, la luna ha andado *MO*, y en virtud de este supuesto los dos planetas discreparán así en longitud, como en latitud lo mismo que quando se le dexaba á cada uno su movimiento particular: todas las apariencias serán las mismas que antes, el supuesto de la órbita relativa no hará mas que simplificar el cálculo.

957 Es por consiguiente la órbita relativa *MO* la que se puede suponer en lugar de la órbita real, y en la qual podria moverse el uno de los dos planetas sin que por esto dexasen de ser las mismas sus distancias reales respecto del otro. El triángulo *MNO* nos dá estas proporciones, *MN* : *NO* :: *R* : tang *OMN*, cos *OMN* : *R* :: *MN* : *MO* (I. 724 y 725); luego para hallar la inclinacion de la órbita relativa y el movimiento horario relativo, se harán estas dos proporciones: *La diferencia de los dos movimientos horarios en longitud, es á la diferencia de los movimientos en latitud, como el radio es á la tangente de la inclinacion relativa.* Despues, *el coseno de la inclinacion relativa es al radio, como la diferencia de los movimientos horarios en longitud, es al movimiento horario* MO *en la órbita relativa.*

958 En estas dos proporciones hemos supuesto que los planetas siguen un mismo rumbo así en longi-

Fig. gitud como en latitud; pero si el uno fuese directo y el otro retrogrado, quiero decir, si la una de las dos longitudes fuese creciente, y la otra menguante, deberia tomarse la suma de los movimientos horarios en longitud, y no su diferencia. Y si la una de las dos longitudes fuese creciente y la otra menguante, del mismo lado de la eclíptica, quiero decir, si la una se encamina al norte y la otra al sur con el movimiento horario en latitud, se debería tomar la *suma* de los movimientos y no su diferencia.

959 En los eclipses de luna no se considera el sol como el uno de los planetas, sí el punto opuesto al sol; este punto opuesto al sol que es el centro de la sombra de la tierra, tiene el mismo movimiento horario en longitud que el sol, y por consiguiente se le debe tratar como al sol. Como este astro no tiene ningun movimiento horario en latitud, solo sirve el de la luna en las dos proporciones de antes (957).

960 En el cálculo de los eclipses de luna basta añadir 8″ á la diferencia de los movimientos horarios en longitud, para hallar el movimiento relativo ó compuesto de la luna al sol, y excusar la segunda analogía; porque en un triángulo que tiene un ángulo de $5^{u}\frac{1}{2}$. y la hypotenusa es de medio grado, el lado mayor viene á tener 8″ menos que la hypotenusa.

De los eclipses de sol.

961 Los eclipses de sol son efecto de la interposicion de la luna, la qual en sus conjunciones pasa alguna vez directamente por entre la tierra y el sol. Los eclipses *totales* son aquellos en que la luna tapa todo el sol, siendo el diámetro aparente de la luna mayor que el del sol. Los eclipses son *anulares* quando se vé la luna entera sobre el sol; pareciendo entonces mayor el diámetro del sol, excede por todas par-

partes al de la luna, y forma al rededor de este un anillo, ánulo ó corona luminosa. Los eclipses son *centrales* quando la luna no tiene ninguna latitud al tiempo de la conjuncion aparente; su centro parece entonces sobre el centro mismo del sol, y el eclipse es total ó anular al mismo tiempo que es central. Fig.

962 Antes que propongamos el método por el qual se determinan las circunstancias de un eclipse de sol, hemos de dar á conocer como suceden respecto de la superficie de la tierra. Para lo qual supondremos un principio que conviene tener siempre presente; es á saber, que el sol está tan distante de nosotros, que los rayos que salen del centro del sol, y ván á los diferentes puntos de la tierra, son sensiblemente paralelos. Desde el punto *T* que supongo 344. sea el centro de la tierra, se vé el centro del sol por un rayo *TS*; el punto *E* que está en la superficie de la tierra, vé el centro del sol por otro rayo *EO*, que forma con el otro un ángulo de $8''\frac{1}{2}$ no mas (939), y que por lo mismo le vá á encontrar á una distancia prodigiosa, por consiguiente este rayo es sensiblemente paralelo al primero. Se puede, pues, suponer que la linea *EAO* paralela á *TLS*, es la linea en la qual el punto *E* de la tierra vé el centro del sol.

963 Si la luna está en *L* en el momento de la conjuncion, el observador puesto en *K* en la superficie de la tierra, verá un eclipse central de sol (961), pues verá el centro de la luna por el radio *TKLS*, por el qual vé el centro del sol. Sea *AL* una porcion de la órbita lunar andada antes de la conjuncion, yendo de *A* á *L*, ó de occidente á oriente. Una vez que el punto *E* de la tierra vé el centro del sol en la linea *EAO* (962), síguese que quando la luna estuviere en el punto *A* de su órbita, tapará al sol, y formará un eclipse central para el observador puesto en *E*; porque entonces el centro

Fig. tro de la luna y el del sol se verán en una misma linea recta *EAO*.

Si la luna gasta una hora en andar la porcion *AL* de su órbita, habrá eclipse para el punto *E* de la tierra, una hora antes que le haya para el punto *K*, ó para el centro *T* de la tierra, esto es, una hora antes de la conjuncion, que suponemos sea en *L*.

964 Muchos no alcanzan como el sol corresponde á un mismo tiempo á diferentes puntos de la órbita lunar respecto de distintos paises de la tierra; pero lo alcanzarán si atienden á lo que pasa en una calle de jardin donde se pasean teniendo el sol á la derecha. Verán que todas las sombras de los árboles son paralelas; quando estuvieren encima de la primera sombra, verán que el sol corresponde al primer árbol; despues que hubieren andado algunos pasos verán que el sol corresponde al árbol que se sigue; y si hubiere quatro personas que estén unas de otras á la misma distancia que hay entre los árboles, verán corresponder el sol á quatro árboles distintos. A este modo el observador puesto en *D* vé que el sol corresponde al punto *C* de la órbita de la luna ó de la proyeccion; siendo así que el observador puesto en *K* vé al sol en el punto *L*, así como el que está en *F* vé al sol en el punto *H*.

965 El punto *E* de la tierra es el primero desde el qual se verá la luna sobre el sol; tendrá el eclipse central quando la luna estuviere en *A* (963), correspondiendo el centro de la luna al centro del sol. Pero antes de llegar á *A*, el centro de la luna estuvo en un punto *M*, tal que entonces el borde *B* de la luna tocaba el borde del sol, porque pareciendo en *A* el centro del sol, el borde de su disco parecia en *B* distante del centro *A* como unos 16′ que es el ángulo en el qual vemos el radio solar. Entonces

ces el centro *M* de la luna distaba del centro *A* del sol una cantidad igual á la suma de los semidiámetros *AB* y *BM* del sol y de la luna, y este era el principio del eclipse para el observador puesto en *E*, ó el primer instante que vió que el limbo, ó borde de la luna tocaba el limbo del sol. La distancia de la luna al punto *L* de la conjuncion, ó la linea de los centros es igual á la suma de los semidiámetros del sol y de la luna mas la cantidad $AL = ET$; por consiguiente el observador que al nacer el sol estaba en *E*, y vió el contacto de los limbos de la luna y el sol, verá el eclipse central desde otro punto del espacio absoluto, distinto del punto *E*; y el habitante de la tierra que llegare al borde *E* del círculo de iluminacion verá el eclipse central quando la luna hubiere llegado á *A*. Fig. 344.

966 La parte *AL* de la órbita lunar igual al radio *ET* de la tierra se vé en un ángulo *AEL*, igual al ángulo *ELT*, paralaxe orizontal de la luna (732); por consiguiente la parte *ML* parece igual á la suma del semidiámetro *BM* de la luna, del semidiámetro *BA* del sol, y de la paralaxe orizontal de la luna igual con *AL*. Por lo mismo el punto *E* de la tierra verá empezar el eclipse luego que la distancia *ML* de la luna al punto *L* de la conjuncion fuere igual á la suma de los semidiámetros del sol y de la luna, y de la paralaxe orizontal de la luna. Asimismo, el punto *G*, el último y mas oriental de la tierra, verá acabarse enteramente el eclipse, quando la luna, despues de pasada la conjuncion, distare del punto *L* la misma cantidad, esto es, la suma de los semidiámetros del sol y de la luna, y de la paralaxe orizontal de la luna.

Si la luna estuviere en *C*, de modo que *AC* tambien sea igual á la suma de los semidiámetros del sol y de la luna, el punto *E* de la tierra tambien

Fig. 344. verá el centro *C* de la luna distante del centro *A* del sol, la suma de los semidiámetros, quiero decir, que verá los bordes del sol y de la luna tocarse, y acabarse el eclipse; pues entonces el centro del sol parece en *A* y el de la luna en *C*, á una distancia *CA* igual á la suma de sus semidiámetros.

Pero al tiempo que la luna está en *C*, y el punto *E* de la tierra vé acabarse el eclipse, otro punto *D* de la tierra, que vé el centro del sol por el rayo *DC* paralelo á *TS*, vé el centro de la luna sobre el centro del sol, quiero decir, que vé un eclipse central; lo propio se verifica respecto de todos los demas paises de la tierra que corresponden perpendicularmente á diferentes puntos de la linea *ACL*.

967. Al mismo tiempo que el punto *E* de la tierra vé acabarse el eclipse con el contacto de los dos bordes, quando el centro de la luna está en *C*, y el punto *D* vé el eclipse central, los puntos de la tierra que están entre *E* y *D*, vén el eclipse de distintas cantidades; así el punto *F* de la tierra, que vé el centro del sol en la paralela *FH*, vé que la distancia aparente de la luna *C* al sol *H* es la cantidad *CH*. Si suponemos que la linea *CH*, tomada en la órbita lunar *LCHAM*, sea menor que la suma de los semidiámetros, la luna cogerá otro tanto en el disco del sol; si fuese un dígito ó una duodécima parte menor, el limbo de la luna estará un dígito sobre el sol, y se dirá que el eclipse es de un dígito. Si *CH* fuese seis dígitos solares menor que la suma de los semidiámetros, es preciso que esta suma, la qual compone la distancia de los centros de la luna y del sol al principio del eclipse, haya mermado otro tanto; y solo ha mermado porque el disco lunar coge otro tanto del disco solar. Luego en el supuesto de ser *CH* seis dígitos menor que *CA* respecto del punto *F*, el observador *F* verá que el disco de la luna tapa seis dígitos del disco

so-

solar, y por consiguiente se verá desde el punto *F* el limbo de la luna sobre el centro mismo del sol. Y si *CH* fuere menor que dicha suma tres dígitos no mas, ó una quarta parte del diámetro solar, la luna se anticipará, tapará, ó morderá tres dígitos no mas del sol, y el eclipse será tambien de tres dígitos. Fig. 344.

968 Por consiguiente, para hallar el punto *F* de la tierra donde el eclipse parecerá de tres dígitos, en un instante dado quando se supone la luna en *C*, es preciso, empezando desde el punto *C* donde está la luna 1.° tomar *CA* igual á la suma de los semidiámetros del sol y de la luna; 2.° empezando desde el punto *A*, tomar *AH* de tres dígitos, &c. 3.° baxar una perpendicular *HFN* á la tierra (esto es, al plano *GE* del círculo de la tierra, perpendicular á la linea de los centros), y estará determinado el punto *F* de la tierra donde el eclipse será de tres dígitos, estando la luna en *C*, pues pareciendo entonces el sol en *H* y la luna en *C*, su distancia es tres dígitos menor, que la suma de los semidiámetros del sol y de la luna.

969 Hasta aquí hemos supuesto que la órbita *LBM* de la luna pasa por la linea *SLT*, que vá desde el centro del sol al de la tierra, y que la luna en conjuncion no tiene ninguna latitud. Desde luego conviene hacerse cargo de que quanto dexamos dicho (965) del punto *M*, debe entenderse igualmente de otro punto qualquiera que esté á la misma distancia del punto *T* y del punto *L*. Supongamos que la linea *LM* (igual á la paralaxe de la luna, mas la suma de los semidiámetros del sol y de la luna), gire al rededor del punto *L*, y trace un círculo cuyo plano sea perpendicular á *LT*, y al plano de la figura; de manera que todos los puntos de este círculo estén á distancias iguales del punto *T*; á este círculo trazado en la region lunar perpendi-

Fig. cularmente á la linea de los centros le llamarémos *el*
344. *círculo de proyeccion*, porque á este círculo referimos y en él proyectamos la tierra y el sol, y este solo es el que considerarémos de aquí en adelante, aplicándole quanto dexamos especificado respecto de la figura que citamos. Es evidente que los diferentes puntos del círculo colocado en la region de la luna y trazado sobre *LA*, corresponden á los diferentes puntos de la circunferencia de la tierra, del mismo modo que el punto *A* corresponde al punto *E* de la tierra, y el punto *L* al punto *K*; cada punto de la tierra tiene su proyeccion ó su imagen en el extremo de la linea que vá á dar perpendicularmente en el *plano de proyeccion*, que suponemos en la region de la luna.

970 Supongamos una linea *LB*, que coja de largo lo mismo que la suma *LM* del radio de proyec-
345. cion y de los semidiámetros del sol y de la luna en la fig. 344; tracemos un círculo *BCGD* en el plano de proyeccion; tracemos tambien otro círculo *AEFR*, cuyo radio *LA* sea igual á la paralaxe de la luna; quando la luna estuviere tan próxima á la conjuncion que su centro esté en algun punto *K* de la circunferencia *BCD*, el eclipse empezará para algun punto de la superficie de la tierra (966).

Igualmente, quando el centro de la luna estuviere sobre algun punto *V* de la circunferencia *AVE* del círculo de proyeccion, parecerá que el centro de la luna corresponde al centro del sol, y el eclipse empezará á ser central para algun punto de la superficie de la tierra, esto es, para el que estuviere directamente debaxo del punto *V*, ó que tuviere su proyeccion en el punto *V*.

971 Llamamos *eclipse general* de sol el que se calcúla para la tierra en general, sin averiguar á que punto se refiere; esta es la primera operacion que hay que hacer antes de determinar las circunstan-

cias

cias de un eclipse de sol respecto de cada lugar particular de la tierra. En el instante que la distancia *LK* del centro de la proyeccion al centro de la luna es igual á la suma de los tres semidiámetros del sol, de la luna y de la proyeccion, el eclipse de sol empieza para un punto de la tierra que corresponde perpendicularmente al punto *I* (965), ó cuya proyeccion está en *I*; este es el principio del eclipse general. Quando la luna ha llegado al punto *G* de su órbita, bastante lejos para que la distancia *LG* sea todavía igual á los tres semidiámetros, el limbo de la luna se separa del limbo del sol respecto del último de todos los paises de la tierra donde puede haber eclipse, este es el fin del eclipse general. La perpendicular *LM* baxada á la órbita, señala el medio del eclipse general.

Fig. 345.

972 Para determinar el tiempo del medio del eclipse general, considerarémos que *LAB* representa una porcion de la eclíptica; *L*, el punto donde está el sol en el instante de la conjuncion; *LH*, la latitud de la luna en conjuncion; *KMG*, la órbita relativa (957). En el triángulo *LMH* rectángulo en *M*, es conocido el ángulo *HLM* igual á la inclinacion de la órbita relativa, y la hypotenusa *HL* igual á la latitud de la luna; se buscará el lado *HM*; se le convertirá en tiempo á razon del movimiento horario de la luna en la órbita relativa, y saldrá el intervalo entre la conjuncion y el medio del eclipse; este intervalo se restará del momento de la conjuncion, si la latitud de la luna fuere creciente, esto es, si la luna hubiere pasado su nudo; pero se añadirá al tiempo de la conjuncion, si la luna fuere acercándose á su nudo; y se sacará el tiempo del medio del eclipse general en *M*.

973 El círculo de proyeccion *AER* representa el disco de la tierra, ó la imagen del emisferio alum-

Fig. brado de la tierra trasladado á la órbita ó region de
345. la luna; la linea *VX* es la porcion de la órbita lunar que será andada en el discurso del eclipse total, así como la linea *KG* es la porcion de órbita que será andada desde el primer instante que la penombra tocará el disco de la tierra en algun punto *I*, esto es, donde algun punto de la tierra verá un principio de eclipse, hasta el último instante que la penombra dexará la tierra en el punto *F*, estando entonces en *G* el centro de la luna, y acabándose el eclipse para el último de todos los paises donde será visible. Por consiguiente la longitud *KG* de la órbita lunar comprehendida entre los puntos *K* y *G*, nos dará á conocer la duracion del eclipse, del mismo modo que el medio *M* de la linea *KG* nos dará á conocer el tiempo del medio del eclipse general. A la linea *KG* la divide en dos partes iguales la perpendicular *LM*, porque los lados *LK* y *LG* son iguales, lo propio sucede con la cuerda *VX*; luego el punto *M* señala el medio del eclipse general, cuya duracion la expresa *KG*; y *VX* representa la duracion del eclipse central.

974 En el eclipse de 1 de Abril de 1764, el tiempo verdadero de la conjuncion fué á las $10^h\ 31'\ 23''$ de la mañana en París; la latitud para el mismo tiempo $39'\ 36''$ boreal; el movimiento horario de la luna en longitud $29'\ 39''$, el del sol $2'\ 27''\ \frac{2}{3}$, la inclinacion de la órbita relativa $5^\circ\ 44'\ 26''$, el movimiento horario relativo ó compuesto $27'\ 19''\ \frac{1}{2}$. Se harán estas dos proporciones $R : 39'\ 36'' :: \text{sen. } 5^\circ\ 44'\ 26'' : 3'\ 58''$, valor de *HM*; y despues $27'\ 19''\ \frac{1}{2} : 60'\ 0'' :: 3'\ 58'' : 8'\ 42''$ de tiempo, estos $8'\ 42''$ se restarán de la hora de la conjuncion, porque la latitud de la luna iba creciendo, y saldrán $10^h\ 22'\ 41''$ para el tiempo del medio del eclipse general, contado en el meridiano de París.

Por

Por medio del mismo triángulo *HLM* se hallará la perpendicular *LM* de 39′ 24″; esta es la distancia mas corta de la luna al centro de la proyeccion al tiempo del medio del eclipse; esta perpendicular *LM* nos servirá para hallar el principio y el fin. Fig. 345.

975 El principio del eclipse general respecto del meridiano de París, se halla por medio del triángulo *LKM* rectángulo en *M*, en el qual conocemos la perpendicular *LM* (974), y la hypotenusa *LK* igual á la suma de los tres semidiámetros del sol, de la luna, y de la proyeccion (965). Buscarémos el lado *MK*, le convertirémos en tiempo á razon del movimiento horario, y restando este tiempo del tiempo del medio del eclipse en *M*, saldrá el tiempo del principio del eclipse general en *K*; añadiéndole, dará el fin del eclipse en *G*.

En el eclipse de 1764, el lado *LM* era de 39′ 24″; la paralaxe de la luna de 54′ 0″ para París, el semidiámetro orizontal de la luna 14′ 47″, el del sol 16′ 1″; se hallará el principio del eclipse general á 7^h 37′ 48″ de la mañana, y el fin á 1^h 7′ 34″ de la tarde; su duracion respecto de toda la tierra era de 5 horas 29′ 46″.

976 El principio del eclipse central sucede quando la luna está en el punto *V*, donde su órbita corta el círculo de proyeccion; porque entonces el centro de la luna, el centro del sol y el borde de la tierra están sobre una misma linea, y el punto de la tierra cuya proyeccion está en *V*, vé el centro de la luna sobre el centro del sol.

En el triángulo *LMV*, rectángulo en *M*, conocemos la perpendicular *LM* (974) y la linea *LV* que es la paralaxe ó el radio de la proyeccion; buscarémos el lado *MV*, le convertirémos en tiempo, quiero decir que buscarémos el tiempo que la luna gasta en andar *VM*, y con restar este tiempo del

 tiem-

Fig. tiempo del medio del eclipse general, sacarémos el
345. tiempo que era en París quando el eclipse empezaba á ser central respecto de algun punto V de la tierra.

Si v. gr. en el eclipse de 1764 suponemos $LV = 54' 0'' = 3240''$, $LM = 39' 24''$, hallarémos $MV = 36' 56''$, cuya cantidad convertida en tiempo dá $1^h 21' 5''$; si restamos esta semiduracion del medio del eclipse $10^h 22' 41''$ (974) sacarémos el principio del eclipse central $9^h 1' 36''$, y si la añadimos al medio del eclipse saldrá el fin $11^h 43' 46''$. Luego el tiempo que el centro de la sombra gastaba en atravesar la tierra era $2^h 42' 10''$.

977 Los cálculos que acabamos de hacer para el eclipse general, se pueden executar gráficamente. Se hará una figura en grande cuyo radio LA sea igual á la paralaxe, ó esté dividido en tantos minutos quantos hubiere en dicha paralaxe; se tomará la línea LH igual á la latitud de la luna, y el ángulo MLH igual á la inclinacion relativa de la órbita lunar (957); se tomará en la misma escala una cantidad igual al movimiento horario de la luna en su órbita relativa, y se llevará de H á N; se señalará en H la hora y el minuto de la conjuncion, y en N una hora menos; con esto se dividirá la órbita GK en horas y minutos, y se verá á que hora la luna se halló en K, en V, M, X y G; conforme sacamos con los cálculos antecedentes.

978 Ahora nos falta averiguar quales son los diferentes paises de la tierra que están en V y X en el instante que la luna llega á dichos puntos, esto es, sus longitudes geográficas y sus latitudes.

346. Enseñarémos como se executa esta determinacion por medio de un globo terrestre de 6 pulgadas de diámetro por lo menos, y de una regla con dos pies, figurada en $GVAE$, cuya longitud VA sea igual al diámetro del globo; y la altura igual al radio del

del mismo globo, ó un poquito mayor, para colocarle Fig.
sobre su orizonte *GE*; el radio de este globo debe 346.
representar el radio de la tierra, ó la paralaxe de la luna, como *LA*; quiero decir, que se le debe suponer, v. gr. de 54′, porque la paralaxe de la luna en el eclipse de 1764 era de 54′.

979 Como no está al arbitrio del calculador mudar el diámetro de su globo en los diferentes eclipses de sol, deberán calcularse las diferentes partes de la figura; esto es, el movimiento horario de la luna, y los diámetros del sol y de la luna, reduciéndolos á dicha escala; si el globo tuviere 8 pulgadas de diámetro, y la paralaxe actual fuese pongo por caso de 54′, se tirará una linea igual al radio del globo, se la dividirá en 54 partes, y se tomarán $27\frac{1}{2}$ de estas para componer el movimiento horario.

980 Para colocar en el globo la órbita de la luna, se ha de trazar una figura como la que aquí citamos, donde la linea *BLD* representa una porcion 345.
de la eclíptica, y *XV* la órbita relativa; se le añadirá una linea *OLQ* para que represente una porcion del equador; haciendo el ángulo *ALO* igual al ángulo de posicion, ó al complemento del ángulo de la eclíptica con el meridiano; el equador estará al medio dia ó debaxo de la eclíptica al oriente del globo en los signos ascendientes, esto es, quando la conjuncion sea entre 21 de Diciembre y 21 de Junio. La suma del ángulo *ALO* y de la inclinacion de la órbita relativa, ó su diferencia, segun los casos, dará el ángulo de la perpendicular *LM* con el meridiano universal *LP*, ó el meridiano del globo, que suponemos inmobil; este ángulo es el mismo que forma la órbita con el equador. Se tomarán en la figura con un compas los arcos *OV*, *QX*, y se señalará igual número de grados en el orizonte del globo, contándo-

Fig. dolos desde los puntos verdaderos de oriente y occi-
345. dente, esto es, desde las intersecciones del equador
346. con el orizonte del globo, yendo ácia el norte, si la latitud de la luna fuese boreal, ó ácia el medio dia si fuese austral.

981 Se levantará el polo del globo sobre el orizonte, un número de grados igual á la declinacion del sol, si la declinacion fuere boreal se levantará el polo boreal; se colocará el pie *GVAE*, de modo que un canto de la regla superior *VA* corresponda perpendicular encima de los dos puntos señalados en el orizonte del globo; en este estado, este travesaño *VA* representará la órbita de la luna, colocada sobre el orizonte del globo, conforme lo estaba sobre el círculo de proyeccion en la figura.

Se tomarán tambien en la misma figura los tiempos de la órbita lunar que corresponden á *V* y *X*, esto es, al principio y fin; se apuntarán en el travesaño *VA*, sobre el qual suponemos encolada una *tira de papel*, y quedará un intervalo *AV*, el qual se dividirá en minutos de tiempo conforme se dividió la órbita *VX* de la luna; ó si no, se hará uso del movimiento horario, y solo se señalará el tiempo del medio del eclipse en medio *L* de la regla, una hora mas á una distancia igual al movimiento horario; una hora menos al occidente ó á la derecha, y lo demas en el intervalo.

982 Solo faltará colocar el globo á la hora que corresponde. V. gr. como en el eclipse de 1764 la luna habia de estar en *A* á 9^h $2'$, principio del eclipse central (976), se dará vuelta al globo de modo que París esté en *C*, 2^h $58'$ al occidente del *meridiano universal* MP. En este meridiano se supone inmobil al sol, mientras que todos los paises de la tierra le pasan succesivamente en virtud de la rotacion de la tierra.

Es-

Estando así dispuesto el globo terrestre para la hora de París, todos los demas paises están igualmente en su lugar para aquel momento, y suponiendo que la luna esté en *A*, el punto de la tierra que corresponde perpendicularmente debaxo de la luna, es aquel donde el eclipse parece central en aquel mismo momento (965); luégo con baxar una plomada desde el punto *A*, si el orizonte del globo estuviere bien á nivel, ó aplicar el ojo perpendicularmente encima del punto *A*, ó finalmente con valerse de una escuadrita, se verá en el globo el punto de la tierra que se buscaba, perpendicularmente debaxo de *A* en el orizonte mismo del globo. Se apuntará la longitud y latitud de dicho punto, y este será el primer punto del eclipse central. Fig. 346.

983 En el punto *A* se colocará el centro de un círculo cuyo radio *AD* sea igual á la suma de los semidiámetros del sol y de la luna tomándola con la escala de los 54 minutos. Se podrá hacer un círculo de carton, y se le colocará paralelo al orizonte del globo, estando su centro en *A*. Si no, se hará circular un compas cuya abertura sea igual á la suma de los semidiámetros, estando la una de sus puntas en *A*; se repararán todos los puntos del globo que correspondieren perpendicularmente debaxo de la circunferencia de este círculo, y estos son los que verán los bordes del sol y de la luna tocarse en el mismo instante, y aquel que estuviere en el orizonte del globo verá el contacto de los dos bordes al nacer el sol.

984 Se hará otro círculo de radio menor que el antecedente, una quarta parte del diámetro del sol, esto es, 3 dígitos (en 1764 eran 8′), ó si no se le hará una muesca al mismo círculo que sirvió para la primera fase, como en el caracol de esta figura; ó si se quisiese, bastará achicar la abertura del compas que sirvió en la operacion antecedente; y la cir- 347.

Fig. circunferencia del círculo despues de quitarle tres dí-
347. gitos, ó la abertura del compas dando la vuelta al rededor del punto *A*, señalará en el globo por medio del plomo todos los puntos de la tierra donde el sol estará eclipsado tres dígitos no mas en aquel instante. La razon de esto la percibirá el que tuviere presente lo dicho (967 y 968).

985 Tambien se podrán hacer otros círculos para el eclipse de 2, 3, 4, 5, &c. dígitos, acortando 2, 3, &c. dígitos el radio del círculo de la *penombra*, esto es, del círculo cuyo radio era igual á la suma de los semidiámetros del sol y de la luna. Se podrá hacer una muesca á un solo círculo cuya circunferencia esté dividida en 12 partes, y el radio tambien en 12 partes, y cuyos 12 sectores vayan menguando como el caracol de un relox de repeticion, siendo cada uno mas chico que el antecedente, un dígito ó una duodécima parte del diámetro solar, tomado con la misma escala que la paralaxe orizontal y el movimiento horario. Haciendo correr un plomo por las circunferencias de estos sectores, señalará en el globo los paises que en aquel instante tuvieren el eclipse de 1, 2, &c. dígitos.

346. 986 Si se coloca en *L* en medio del travesaño *AV*, el centro de estos círculos, y se hace la misma operacion, despues de dar la vuelta al globo hasta que su muestra *P* esté á las $10^h 23'$, hora del medio del eclipse general al meridiano de París, se hallarán todos los paises que á $10^h 23'$ tendrán el eclipse de 1, 2, &c. dígitos. De este modo se puede trazar en un globo ó mapa geográfico la figura de todos los puntos que tendrán un eclipse central, ó que tendrán un eclipse de 1, 2, &c. dígitos. Prevenimos que todos estos paises que en un instante dado ven el eclipse de un dígito, no por eso tienen la cantidad del eclipse de un dígito; porque esta operacion

cion no determina la fase máxima, solo determina la Fig.
qué corresponde á un momento dado. Pero tambien se podría hallar aquel respecto del qual esta fase es máxima, reparando el punto de la tierra que mas dista del punto *A*, ó que mediante un corto movimiento del globo y de la luna se mantiene á la misma distancia de la luna.

Del paso de Venus por el disco del Sol.

987. Venus y mercurio que se mueven al rededor del sol mas cerca que nosotros (680), se hallan entre la tierra y el sol en el discurso de cada revolucion synódica; y si entonces fuere corta la latitud de estos planetas, se verá sobre el sol una mancha negra y redonda, cuyo ancho parece que ocupa como la trigésima parte del ancho del sol, si fuere venus, y la 150ma no mas, si fuere mercurio.

988. Estos pasos solo suceden quando venus y mercurio en su conjuncion inferior, no tienen una latitud mayor que el semidiámetro del sol, quiero decir, quando la conjuncion se verifica muy cerca del nudo, á la distancia del 1° ¾ quando mas por lo que mira á venus.

989. Estos pasos son de mucha importancia, porque dan un medio para determinar con puntualidad el lugar del nudo *N* de mercurio y venus, despues de averiguada la situacion *OR* de la órbita del planeta; 348.
dan la longitud heliocéntrica sin atender á la paralaxe de la grande órbita, pues la conjuncion del planeta con el sol *S* prueba que la longitud del planeta vista desde el sol es la misma que la longitud de la tierra. Pero los pasos de venus tienen la apreciable circunstancia de darnos á conocer la paralaxe del sol (829 y 993) de donde pende la determinacion de las distancias de todos los demás planetas respecto unos de otros y respecto de la tierra (741); este es el

Fig. el motivo porque han sido tan sonados.

990 En todo paso de venus concurren tres circunstancias que hacen sumamente apreciable su observacion. 1.° La suma precision con la qual se observa el contacto de dos objetos, de los quales el uno es oscuro y está puesto encima del que es luminoso; no hay mas caso que este en toda la Astronomía, en que se pueda observar un ángulo de distancia con diferencia de una décima de segundo no mas; 2.° la razon conocida de la paralaxe de venus al sol, con la de todos los demás planetas; 3.° la cantidad de esta paralaxe que ocasiona una diferencia de mas de un quarto de hora entre las observaciones, y es mas que dupla de la del sol.

991 Digamos porqué los pasos de mercurio y particularmente los de venus por el disco del sol suceden tán pocas veces. Venus siempre vuelve á su conjuncion inferior al cabo de un año y 219 dias; parece, pues, que en cada conjuncion deberíamos ver á venus sobre el sol, pues está entre el sol y nosotros; pero para esto no basta que venus esté en conjuncion con el sol, es preciso que esté ácia su nudo, y que su latitud vista desde la tierra no sea mayor que el radio del sol, ó no pase de

348. 16'. Sea S el centro del sol; SN, la eclíptica; ORN, la órbita de venus; en el instante que corresponde perpendicularmente al punto S de la eclíptica donde está el sol, SV es la latitud geocéntrica de venus; si esta latitud fuere menor que el radio SA del sol, venus se dexará ver sobre el disco OAR del sol. Lo mismo decimos de mercurio.

992 Venus fué observado sobre el sol en 1639, 1761 y 1769. El paso de venus observado en 1769 es una de las observaciones mas importantes que han hecho los Astrónomos, porque ha dado á conocer la verdadera paralaxe del sol. Si la paralaxe que hace

pa-

parecer los astros mas baxos (734), hace que veamos Fig. 347.
á venus á lo largo de la linea *BC* en lugar de verle la órbita *OR*, andará sobre el sol una cuerda menos larga, y la duracion de su paso será menor; por consiguiente con observar esta duracion podemos determinar la paralaxe de venus. De las cinco observaciones que se hicieron con toda satisfaccion del paso de venus de 1769, se ha sacado que la paralaxe del sol es de 8″ 5, 6. 8″. 6; esto es, ocho segundos y seis décimas de segundo.

993 Para determinar este punto, basta calcular el principio y fin de un paso de venus, llevando en cuenta la paralaxe. Se saca que la duracion del paso de 1769, vista desde el centro de la tierra, habia de ser de 5^h 41′ 56″ entre los dos contactos interiores, esto es, entre el momento que el disco de venus estuvo todo entero sobre el sol, y el primer instante que empezó á salir; pero con calcular estas mismas fases para Wardhus, Ciudad de Noruega donde fué observado el paso, y dando 8″ 5 de paralaxe al sol, con lo que dá para el mismo dia 21″ $\frac{53}{100}$ de exceso á la paralaxe de venus respecto de la del sol, se saca que la duracion del paso habia de ser allí 10′ 52″ de tiempo mayor. Al contrario, en la Isla de Taiti habia de ser 11′ 42″ menor. Síguese de aquí que si se ha observado en Taiti una duracion 22′ 35″ menor que en Wardhus, como efectivamente se observó con corta diferencia, la paralaxe del sol es positivamente de 8″ 5.

De los eclipses de los Satélites.

Tratarémos este asunto por el mismo orden que hemos guardado al declarar la teórica de los satélites.

De

Fig.

De los eclipses de Luna.

994. El eclipse de luna es la obscuridad que causa en su disco la sombra de la tierra. El eclipse es *total* quando la luna queda enteramente obscurecida; y es *parcial* quando queda luminosa una porcion del disco lunar. El eclipse es *central* quando la oposicion sucede en el punto mismo del nudo; entonces la luna pasa por el centro mismo del cono umbroso.

995 Hay años en que no sucede ningun eclipse de luna, tal fué el año de 1767, pero lo regular es que haya varios cada año.

996 Quando la luna en el instante de su oposicion verdadera está tan lexos de sus nudos que su latitud pase de 64 minutos, no puede haber eclipse, porque la sombra de la tierra no coge (998) en la órbita de la luna mas de 47′, y el semidiámetro 17′; por consiguiente para que el borde de la luna pueda tocar la sombra de la tierra, es preciso que la distancia de sus centros á la latitud de la luna no pase de 64′. Quando esta distancia pasa de 30′, no puede ser total el eclipse.

997 Ya que medimos los movimientos de la luna con los arcos que parece que traza, del mismo modo hemos de medir la sombra que atraviesa en los eclipses, esto es, el ancho del cono tenebroso que la tierra arroja, interceptando la luz del sol.

349. Sea *S* el centro del sol; *T*, el centro de la tierra; *L*, el de la luna en oposicion; *SA*, el semidiámetro del sol; *TB*, el semidiámetro de la tierra; *LC*, el semidiámetro de la sombra de la tierra en el parage donde la luna tiene que atravesarla; esta linea *LC* es el radio del círculo que forma la seccion, perpendicular al exe, del cono umbroso en la region de la luna.

El

El ángulo *CTL* formada en el centro de la tierra, Fig.
cuya base es el lado *CL*, se llama el *semidiámetro* 349.
de la sombra; este es el ángulo en el qual vemos el movimiento de la luna, ó el arco de su órbita que anda en la semiduracion del eclipse del centro, esto es, al atravesar la sombra de *C* á *L*.

998 El triángulo rectilineo *CAT* cuyo lado *AT* está prolongado hasta *D*, tiene su ángulo externo *CTD*, igual á los dos ángulos internos *BAT* y *BCT* juntos (I. 448), de los quales el uno es la Paralaxe del sol, el otro la de la luna (733). Luego el ángulo *CTD* es igual á la suma de las paralaxes; si se le quita el ángulo *LTD*, quedará el ángulo *CTL* ó el semidiámetro de la sombra; pero el ángulo *LTD* es igual al ángulo opuesto *ATS*, que mide el semidiámetro aparente del sol; luego *si de la suma de las paralaxes se resta el semidiámetro aparente del sol, el residuo será el semidiámetro de la sombra*, cortada en la region de la luna á la distancia *TL* de la tierra. El círculo que forma esta seccion del cono umbroso está figurado separadamente visto de cara en la
figura; es el círculo umbroso cuyo radio es *LC* en la 350.
figura de antes donde se via la sombra de lado.

La paralaxe orizontal de la luna en el instante de la oposicion de 17 de Marzo de 1764, era de 60′ 56″, la paralaxe orizontal del sol es constantemente de 8″ $\frac{1}{2}$ (939 y 992); luego la suma de las paralaxes era 61′ 5″; si de esta restamos el semidiámetro del sol 16′ 5″, quedarán para el semidiámetro de la sombra 45′ 0″. Se añadirán á esta cantidad como unos 45″, tantos segundos quantos minutos hay, porque parece que la atmósfera de la tierra aumenta la sombra un 60.avo

El semidiámetro de la sombra sacado por esta regla, puede variar desde 37′ 46″ hasta 46′ 19″; es máximo quando la luna es perigea y el sol apogeo.

Fig. 999 Una vez que el diámetro de la sombra es igual á la suma de los paralaxes menos el semidiámetro del sol, y la paralaxe del sol es muy corta, es evidente que si rebaxamos de la paralaxe de la luna el semidiámetro del sol, sacarémos el semidiámetro de la sombra; y si conociéremos el valor de este semidiámetro por medio de la duracion de un eclipse observado, y le añadimos el semidiámetro del sol, sacarémos la paralaxe de la luna.

Determinar las fases de un eclipse de Luna.

1000 Despues de sabida la hora de la luna llena ó de la oposicion verdadera (952 y sig.), la latitud de la luna para el mismo tiempo, la inclinacion de su órbita que pende del movimiento horario de la luna así en longitud como en latitud, se ha de buscar el tiempo del medio del eclipse.

350. Sea *O* el punto de la eclíptica opuesto al sol, ó el centro de la sombra de la tierra á la distancia de la luna; *OG*, el semidiámetro de la sombra; *ELS*, la órbita relativa de la luna (957); *L*, el lugar de la luna en el instante de la oposicion; *OL*, la latitud de la luna, ó su distancia á la eclíptica *KG*; *OM*, la perpendicular baxada á la órbita relativa *EMS*. En el instante que el eclipse empieza, estando la luna en *E*, el borde de la luna toca en *P* el borde de la sombra; es, pues, *E* el lugar de la luna al principio del eclipse; y *S* es el lugar de la luna al fin del eclipse, ó á la salida de la sombra. Los triángulos *MOE*, *MOS* son iguales porque el lado *OM* es comun á ambos, los lados *OE* y *OS* son iguales, y son rectángulos en M; luego el lado *EM* es igual al lado *MS*; luego el punto *M* señala el medio del eclipse, siendo así que la oposicion se verifica quando la luna está en el punto *L* de su órbi-

bita en un círculo de latitud *OL* perpendicular á la Fig.
eclíptica *KG* en el punto *O* que está directamente 350.
opuesto al sol.

1001 En el triángulo *LOM*, que causa el círculo de latitud *OL* con la perpendicular *OM*, el ángulo *LOM* es igual á la inclinacion de la órbita relativa de la luna (957); porque la perpendicular á la órbita, y la perpendicular á la eclíptica forman indispensablemente el mismo ángulo que forma la órbita con la eclíptica; con este ángulo tambien conocemos el lado *LO* latitud en oposicion. Luego hallarémos *LM* por medio de esta proporcion: *El radio es al seno de la inclinacion, como la latitud* OL *es al intervalo* LM (I. 720). Se le convertirá en tiempo á razon del movimiento horario de la luna, diciendo: *El movimiento horario relativo* (957) *es á* 1^h *ó* 3600″, *como el espacio* LM *es al tiempo que habrá entre la conjuncion y el medio del eclipse.* Este intervalo de tiempo se rebaxará del momento de la oposicion, si la latitud de la luna fuere creciente; se la añadirá al tiempo de la oposicion, si la latitud fuere menguante ó la luna fuere acercándose á la eclíptica y al nudo, y se determinará el medio del eclipse.

1002 En el eclipse de luna de 17 de Marzo de 1764 se hallaba por las tablas que la luna llena, ó la oposicion verdadera habia de ser á $12^h\ 6'\ 12''$; el movimiento horario de la luna era de 37′ 23″ en longitud, y 3′ 26″ en latitud, el movimiento horario del sol 2′ 29″. La diferencia de los movimientos horarios 34′ 54″ es al movimiento en latitud 3′ 26″, como el radio es á la tangente de la inclinacion relativa 5° 37′: el coseno de esta inclinacion 5° 37′ es al radio, como la diferencia de los movimientos horarios en longitud 34′ 54″, es al movimiento horario de la luna en su órbita relativa 35′ 4″.

La latitud de la luna en oposicion era de 38′ 42″;

 el

Fig. el radio es al seno de la inclinacion 5° 37', como la
350. latitud 38' 42" es al intervalo *ML*, que sale de 3' 47" en partes de grado. El movimiento horario relativo 35' 4' es á 60' 0", como 3' 47" son á 6' 28" de tiempo. Se añadirá este intervalo, porque la latitud era menguante, por no haber llegado todavía la luna al nudo. Y como el tiempo de la oposicion era 12^h 6' 12", el medio del eclipse fué á 12^h 12' 40", esto es, el dia 18 de Marzo, 0^h 12' 40" de la mañana.

1003 Las mismas cantidades que han servido para hallar la diferencia *LM* entre la conjuncion y el medio del eclipse, servirán para hallar la distancia mas corta *OM* de la órbita lunar al centro de la sombra. Forque en el triángulo *LOM* rectángulo en *M*, conocemos *LO* que es la latitud al tiempo de la conjuncion, y el ángulo *LOM* igual á la inclinacion de la órbita relativa de la luna, y sacarémos el lado *OM* de 38' 31".

1004 Para determinar el principio y fin del eclipse, sea *E* el centro de la luna quando entra en la sombra, al empezar el eclipse ó quando el primer borde de la luna toca en *P* el borde de la sombra. La distancia *OE* de los centros de la luna y la sombra se compone de las cantidades *OP* y *PE*; la una *OP* es el semidiámetro de la sombra (998), y la otra el semidiámetro de la luna *EP*. La distancia *OS*, al fin del eclipse, se compone de las cantidades *OR* y *RS*, quiero decir que tambien es igual á la suma del semidiámetro de la sombra y de la luna; en el caso propuesto será 1° 3' 19".

1005 En el triángulo *OEM* rectilineo y rectángulo en *M*, conocemos la perpendicular *OM* (1003), y la suma *OE* de los semidiámetros de la luna y la sombra; se buscara el tercer lado *ME*, y se le convertirá en tiempo con hacer la siguiente proporcion. El movimiento horario de la luna en su órbita rela-

tiva; 35′ 4″ es á 1 hora ó 3600″, como el lado *ME*, Fig.
50′ 15″ es á la semiduracion del eclipse, 1^h 25′ 59″.

1006 Esta semiduracion del eclipse es el tiempo que la luna gastaba en ir desde *E* á *M*; pero hemos hallado que el medio del eclipse en *M* era 12^h 12′ 40″ (1002); si de esta cantidad restamos 1^h 25′ 59″, saldrán para el principio del eclipse 10^h 46′ 41″; y si se le añadimos, saldrán para el fin del eclipse 13^h 38′ 39″.

1007 En los eclipses totales de luna hay que determinar dos fases mas, es á saber, la *inmersion* y la *emersion* en *N* y *R*. El centro de la luna está en *D* 351.
en el instante que está metida en la sombra lo que es menester, para que su último borde *N* toque el borde interior de la sombra. Resulta de aquí otro triángulo *OMD*, cuya hypotenusa *OD* es igual á la diferencia que vá del semidiámetro de la sombra *ON* al semidiámetro *DN* de la luna. Pero no por eso la operacion dexa de ser la misma que antes (1005); se resta la semiduracion del eclipse total del medio del eclipse, para hallar la inmersion que sucede en *D*, se le añade para hallar la emersion que sucede en *V*.

1008 En teniendo averiguada la distancia mas 350.
corta de los centros *OM*, el semidiámetro de la sombra *OA*, y el semidiámetro de la luna *MB*, es facil de determinar la parte eclipsada de la luna, esto es, la cantidad *AC*. Porque $AM = OA - OM$, si le añadimos *MC*, saldrá *AC*; luego $AC = OA + MC - OM$, quiero decir *que la parte eclipsada es igual á la suma de los semidiámetros de la luna y de la sombra, menos la mas corta distancia*. Lo propio digo de la parte *AC*, que tambien se llama la cantidad del eclipse, incluyendo la parte de la som- 351.
bra que excede á la luna.

En el eclipse de 17 de Marzo de 1764, la suma de los semidiámetros era 63′ 19″, la mas corta dis-

 tan-

Fig. tancia será 58′ 31″, la diferencia 24′ 48″ es la parte eclipsada AC. Suele expresarse en dígitos ó en duodécimas partes del diámetro de la luna; se hará, pues, esta proporcion, el diámetro aparente de la luna 33′ 18″ es á 12 dígitos ó minutos, como 24′ 48″ son á un quarto término que será 8d 56′ ½. Por consiguiente la cantidad del eclipse fué de 8 dígitos y 56′ ½ de dígitos.

1009 Tambien se pueden determinar sin cálculo, con la regla y el compás, todas las circunstancias de un eclipse de luna, una vez calculado por las tablas el tiempo de la conjuncion, la latitud, la paralaxe, y el movimiento horario. Este método es muy suficiente quando no se lleva otra mira que pronosticar los eclipses venideros; porque no puede haber un minuto de equivocacion en la operacion gráfica, con tal que la figura tenga por lo menos un pie de diámetro; y no cabe mas precision en un eclipse de luna, ni tampoco en la observacion. Por este motivo nos parece que basta la operacion gráfica en todos los eclipses de luna.

1010 La declararémos aplicándola á un caso particular. Como el semidiámetro de la sombra de la tierra en la region de la luna se halló de 46′ (998), divido el radio *OG* en 46 partes; tomo *OL* igual á la latitud de la luna 38′ ½; y por el punto *L*, tiro la órbita de la luna *ELS*, inclinada 5° 37′ (960) á la paralela á la eclíptica. Por ser de 35′ el movimiento horario relativo, tomo 35′ en las divisiones de *OG*, llévolas sobre la órbita desde *L* á *X*; y despues de señalar en *L* el tiempo de la conjuncion 12h 6′, señalo 11h 6′ en el punto *X* distante del punto *L* la cantidad del movimiento horario; divido *XL* en 60′ de tiempo, y las mismas aberturas de compás sirven para dividir lo demás de la órbita *ELMS*. Tomo una abertura de compás igual á la suma de los semidiámetros de la sombra

bra y de la luna, 1° 3′, y con llevarla desde *O* á *S* sobre la órbita relativa, hallo en sus divisiones que el punto *S* corresponde á 13ʰ 39′, lo mismo que dió el cálculo (1006). Fig. 1

1011 La *penumbra* es una obscuridad menor que la del cono umbroso; es una luz debil, procedente de que una porcion del disco del sol, no dexa de alumbrar la luna aun quando dexa de alumbrarla el centro. El punto *E*, que está en el lado *OEP* del cono umbroso, está en una total obscuridad, porque no le alumbra rayo alguno del sol. El punto *F* que está en la linea *AGF*, tirada por el limbo superior *A* del sol y el borde inferior *G* de la tierra, goza una luz perfecta, porque vé todo el disco del sol; pero todos los puntos que están entre *E* y *F* no ven mas que una parte del disco solar, no les hiere mas que una parte de la luz del sol, y forman la penumbra; esta es la razon porque es tan dudoso el principio de un eclipse de luna, y se padecen á veces en su determinacion equivocaciones de muchos minutos.

1012 Se notan diferencias considerables en el color de los eclipses de luna; quando la luna es apogea, atraviesa el cono umbroso mas cerca de su vértice, y entonces parece mas colorada, mas luminosa que quando los eclipses suceden en el perigeo. Porque en el perigeo los rayos quebrantados por la atmósfera, que se desparraman en el cono umbroso, y debilitan su obscuridad, no llegan hasta el exe de la sombra ó el exe del cono el qual es allí muy ancho; y estando la luna mas próxima á la tierra, la obscuridad que causa en la luna es mas entera.

1013 Esto explica porque ha habido eclipses donde la luna se ha desaparecido del todo; bien que este es caso muy raro.

Fig.

Eclipses de los Satélites de Júpiter.

1014 Los eclipses de estos satélites son un punto muy importante para la geografía. Lo primero que acerca de ellos conviene conocer es el *diámetro de la sombra* de júpiter en tiempo, ó la duracion del paso de cada satélite por la sombra de júpiter, quando la atraviesa por el centro. En la tabla adjunta vá expresada la mitad de esta cantidad ó el semidiámetro de la sombra.

1	1h	7′	55″
2	1	25	40
3	1	47	0
4	2	23	0

1015 Si las órbitas de los satélites se mantuviesen constantemente en el mismo plano con la órbita de júpiter al rededor del sol, cada satélite padecería eclipse á cada revolucion, y la semiduracion de cada eclipse sería la misma que vá apuntada en la tabla antecedente; pero se ha observado que esta duracion varía; hay casos en que el tercer satélite no está eclipsado mas que $1^h. 17'$, y otras veces lo está $3^h 34'$. Tambien consta por observacion que en algunos tiempos el quarto satélite se eclipsa á cada revolucion, y que algunos años despues pasa mas arriba de júpiter sin padecer eclipse. De aquí se ha inferido que las órbitas de los satélites no están en un mismo plano con la órbita de júpiter, porque si lo estuvieran todos los satélites padecerían eclipse á cada revolucion, y sus eclipses durarían constantemente un mismo tiempo: estas diferencias notadas entre las duraciones de los eclipses sirven (y no se practica otro método) para averiguar las inclinaciones de las órbitas.

1016 Declararémos como la inclinacion de las órbitas hace desiguales las duraciones de los eclipses,

ses, y que ley sigue esta desigualdad. Quando el satélite atraviesa el cono umbroso por su centro, está puntualmente en la linea recta que vá desde el centro de júpiter al centro del sol; está, pues, en la seccion comun de su órbita y de la de júpiter, pues se halla á un tiempo en el plano de su órbita, de la qual jamás se aparta, y en el plano de la órbita de júpiter, pues la linea tirada desde el sol á júpiter, siempre está en el plano de esta órbita. Ya que el satélite está entonces en la seccion comun de su órbita y de la de júpiter, es patente que en la misma se halla tambien júpiter; luego se puede decir que júpiter está entonces en el nudo de su satélite. Por consiguiente, quando júpiter está en el grado de longitud al qual corresponde uno de los nudos de la órbita de un satélite, visto desde el centro de júpiter, el satélite atraviesa la sombra por el centro, y la duracion de su eclipse es máxima. Fig.

1017. Sea *SO* la linea de los nudos, ó la linea 352. en la qual estaba júpiter, quando el plano de la órbita del satélite se dirigía al sol, y el satélite atravesaba la sombra por el centro; supongamos que júpiter haya caminado desde *O* á *I* con la órbita del satélite que le rodea, cuya órbita siempre se mantendrá paralela á sí misma, pues no hay cosa alguna que mude su situacion, y la linea de los nudos estará en una direccion *AC* paralela á *SO*. Luego quando júpiter se aparta del nudo, la linea de la sombra yá no está en la seccion comun de las órbitas de júpiter y del satélite; luego en llegando el satélite á estár en oposicion en el punto *M*, no estará en el plano de la órbita de júpiter, y no estará en la linea de los centros; estará mas arriba ó mas abaxo.

1018. Quando júpiter está en el nudo de uno de sus satélites, un observador, suponiéndole que esté en el sol, se halla en el plano de la órbita del saté-

li-

Fig. lite, y la vé como una linea recta. Para que la viera siempre recta, sería menester que siempre pasara por su ojo, que la seccion comun ó la linea de los nudos siempre pasase por el sol, para lo qual sería preciso que diese la vuelta al cielo del mismo modo que júpiter en doce años, cuya circunstancia no se verifica; la linea de los nudos se mantiene casi fixa en el cielo; quiero decir paralela á sí misma, y sensiblemente dirigida al mismo punto del cielo; en pasando júpiter por ella una vez, tarda seis años en volver.

352.

1019 Sea, pues, *NCIA* la linea de los nudos; *ABCD*, la órbita del satélite que atraviesa en *A* y *C* el plano de la órbita de júpiter; conviene figurarse que la órbita del satélite está levantada en *B* encima del plano de la figura, y está un poco ácia el norte; al contrario en *D* está un poco ácia el medio dia, ó debaxo del plano de la figura. Desde *A* ácia *B*, el satélite va apartándose siempre mas arriba del plano de la órbita de júpiter; desde *B* hasta *C*, vuelve á acercarse á dicho plano, y desde *C* hasta *D*, baxa debaxo del plano, al qual vuelve desde *D* ácia *A*. Una vez que *B* es el límite, el punto de la latitud máxima, ó de la elevacion máxima del satélite respecto del plano de la órbita de júpiter, quando llegue este satélite á *M* en su conjuncion superior donde padece eclipse, no estará todavía en su latitud máxima, y estará tanto menos apartado del plano de la figura ó de la órbita de júpiter, quanto menor fuere el ángulo *AIM* ó su igual *SIN*. Pero el ángulo *SIN*, distancia del satélite á su nudo es igual al ángulo *ISO*, ó á la distancia que hay entre el lugar de júpiter *I*, y la linea *SO* que se supone inmobil, con la qual la linea de los nudos *IN* se mantiene constantemente paralela, sea el que fuere el lugar de júpiter. Por consi-

338
G
N B C D
H
T

S
V O
B
N A 339
T

S

S O
L C H A B M

A
342
T
S V
R
P

M
343
O N

344
K D
F
G T N E

A D
E

347
Contacto
2 digitos
4
6
8

348
S N
R
V
O C
B
A

B
350 X E
A
M L
C P
O 10 20 30 40 G

A 351 N
B
R D
M
V
C
O

siguiente la latitud del satélite en *M* penderá del Fig. arco *AM*, ó del ángulo *ISO*, distancia de júpiter 352. á la linea de los nudos *SO*, la qual siempre viene á estár ácia el onceno signo de longitud.

1020 La cantidad que al punto *M* se levanta mas arriba de la órbita de júpiter, es á la cantidad que el límite *B* se aparta, como el seno de *AM* es al seno del arco *AB*, esto es, al radio. Porque si dos círculos se cortan en *A* y *C*, su distancia en diferentes puntos, como *M*, perpendicular al círculo inclinado, ó á la órbita del satélite, es como el seno de la distancia al punto *A*, esto es, á la intersección de los dos círculos (904). Por consiguiente la latitud del satélite en *M*, es como el seno de la distancia de júpiter al nudo del satélite.

1021 Quando por el movimiento de júpiter en su órbita el radio *SI* llega á ser perpendicular á la linea de los nudos *SO* ó *IN*; el punto *M* de la conjuncion superior coincide con el punto *B*, límite de la latitud máxima, entonces el ángulo de la órbita con el rayo visual *SIM*, es igual á la inclinacion del satélite, pongo por caso es de 3°, y la órbita vista desde el sol parece en forma de elipse cuyo exe mayor es al menor como el radio es al seno de 3°, conforme enseñarémos en la Geografia; no atendiendo al movimiento de júpiter en el discurso de la revolucion del satélite, ó considerando el satélite solo respecto de júpiter. Sea *S* el sol; *I*, el centro de júpiter; *IH*, el radio de la órbita de un sa- 353. télite que está en un plano perpendicular á la órbitá de júpiter, é inclinado al rayo solar la cantidad del ángulo *SIH*; tendrémos $IH : KH :: R : \text{sen } KIH$; luego $KH = IH \cdot \text{sen } KIH$, esto es, la cantidad que parecerá el satélite levantarse mas arriba del plano del ojo, al tiempo que la elipse estuviere mas abierta. En las demas posiciones de júpiter respecto del

 nu-

Fig. nudo, esta cantidad menguará como el seno de la distancia de júpiter al nudo (1020); por consiguiente, si llamamos *I* la latitud máxima, ó la inclinacion del satélite; *D*, la distancia de júpiter al nudo del satélite, contándola en la órbita de júpiter; *R*, la distancia del satélite á su planeta, ó el radio de su órbita, será *R*. sen *I*. sen *D* la cantidad que el satélite parecerá levantado mas arriba del plano de la órbita de júpiter perpendicularmente á la órbita del satélite, en el instante de su conjuncion superior; esto basta para calcular la duracion de los eclipses.

1022 Esta elevacion del satélite mas arriba de júpiter es igual á su depresion en el punto opuesto; luego la elipse que parece que traza es mas ó menos abierta, segun se aparta júpiter de la linea de los nudos; quando el exe menor de esta elipse es mas
354. largo que el ancho del cono umbroso, el satélite pasa por mas arriba de la sombra, como se vé en la figura; esto siempre le sucede al quarto satélite de júpiter como unos dos años despues que pasa júpiter por los nudos de los satélites. Quando júpiter
355. está 30° lexos de la linea de los nudos, la elipse tiene la mitad del ancho que tenía en el caso antecedente, porque el seno de 30° es la mitad del seno total (I. 705); entonces el satélite atraviesa la sombra á pesar de la oblicuidad de su órbita.
356. 1023 La seccion de la sombra de júpiter en la region del satélite esta figurada en el círculo *EDBF* que suponemos perpendicular á la linea de los centros del sol y júpiter. Le atraviesa un diámetro *QB*, que es una porcion de la órbita *CN* de júpiter; *ED* es una porcion de la órbita del satélite; *N*, el nudo ó la interseccion; *CA*, es la perpendicular á esta órbita; es un arco que visto desde júpiter es lo mismo que la latitud del satélite; su seno sería

ría igual á sen I. sen D por la propiedad (II. 707) del triángulo esférico rectángulo CAN. Fig. 356.

1024 Despues de determinada la CA, se la debe comparar con el radio CD ó CB, cuyo valor se sabe por observacion qual es en segundos de tiempo; porque es el semidiámetro de la sombra (1014), esto es, la semiduracion máxima de los eclipses, que está figurada en CB. Tambien expresarémos la distancia del satélite á júpiter, ó el radio de su órbita, en partes de la misma especie, ó en segundos de tiempo, con substituir en lugar de R el tiempo que gasta el satélite en andar un arco igual al radio de su órbita, esto es, de 57° (II. 638). Porque no importa que esta distancia, la qual tomamos por unidad, vaya expresada en tiempo, en grados, ó en semidiámetros de júpiter, ni que el movimiento de júpiter haga mas largo el tiempo de los 57°, porque aquí solo buscamos la razon entre la distancia y el arco andado en el discurso del eclipse. Para determinar el tiempo que corresponde á un arco de unos 57°, basta hacer esta proporcion, 360° son á la revolucion synódica, como 57° ó 206264″ son al tiempo t que buscamos. Si multiplicamos sen I. sen D por este número de segundos de tiempo, sacarémos CA en segundos de tiempo $= t$. sen I. sen D; tambien se sabe el valor del radio CD ó CB en segundos de tiempo, es la semiduracion del eclipse máximo, el que sucede quando júpiter está en el nudo del satélite; finalmente, es el semidiámetro de la sombra en tiempo (1014); se buscará el lado AD tambien expresado en segundos de tiempo, y se hallará la semiduracion del eclipse.

1025 Así, la duracion de los eclipses quando es mínima nos dá á conocer la inclinacion de la órbita, y quando es máxima, nos manifiesta el lugar del nudo.

La

Fig. 1026 La paralaxe anua (848) tambien se debe llevar en cuenta respecto de los satélites, porque como puede llegar á ser de 12°, causa diferencias muy notables en la situacion aparente que observamos desde la tierra, quando un satélite está en el mismo punto de su órbita; y esta es la razon porque los satélites aun quando están en conjuncion, y eclipsados, nos parecen á veces bastante lexos de júpiter. El tiempo en que mas importa conocer la situacion aparente de los satélites, es el de las inmersiones y emersiones, por lo que nos detendrémos en especificar los efectos de esta paralaxe.

1027 Sea I el centro de júpiter, rodeado de las
357. órbitas de sus quatro satélites; IG, la linea de los sicygies ó el exe del cono umbroso que vá desde el sol á júpiter, y despues mas allá del lado del punto G de la oposicion; GE, un arco de 11° tomándole en la circunferencia de la órbita del quarto satélite. Por ser este arco igual á la paralaxe *máxima* anua de júpiter, en sus medias distancias, la linea IE señalará la direccion del rayo visual de la tierra quando júpiter está en su quadratura, entre la oposicion y la conjuncion, pasando por el meridiano á las 6^h de la tarde; porque entonces vemos á júpiter 11° al occidente de su lugar verdadero heliocéntrico, figurado en la linea IG. Si por los puntos G, F, g, f, en los quales están los satélites en conjuncion, se tiran paralelas á la linea IE, quales son GD, FC, gB, fA, quedarán determinados los quatro puntos A, B, C, D, donde han de parecer los satélites al lado de júpiter, en el instante de su conjuncion heliocéntrica.

1028 En los demás tiempos del año quando la paralaxe no llegue á 11°, se hallará la posicion del rayo visual IE, linea de las conjunciones geocéntricas, trazando sobre el arco EG como radio un semi-

micírculo, dividido en grados, ú horas; se tomarán Fig.
30° empezando desde el punto *E* de 6 horas, en el qual se señalarán 4^h y 8^h, porque estando júpiter á 30° de su quadratura, pasa por el meridiano á eso de las 8 de la noche ó á las 4^h de la tarde; y se tirará ácia este punto de 4^h la linea *IE*.

Quando júpiter, despues de la conjuncion, pasa por el meridiano por la mañana, la linea *JE* de la conjuncion geocéntrica se debe tirar á la derecha ó á la parte oriental; y los satélites nos parecerán á la izquierda ó al occidente de júpiter al tiempo de sus conjunciones heliocéntricas.

1029 Esta figura dará á conocer la distancia de los satélites en el instante de la emersion, tomando del lado del oriente, esto es, á la derecha de los puntos *A*, *B*, *C*, *D* una cantidad igual al semidiámetro de la sombra, que viene á ser igual con corta diferencia al semidiámetro *IH* de júpiter, y quedará determinada la distancia de los satélites respecto del borde de júpiter, para el tiempo de sus emersiones; ó si no, se mirará la distancia *IA* de un satélite al centro de júpiter, para el tiempo de la conjuncion, y esta será la distancia al borde occidental *H*, para el tiempo de la inmersion, y al borde oriental *X*, para el tiempo de la emersion. Estas distancias van apúntadas debaxo de la figura, y son de $\frac{5}{10}$, $\frac{8}{10}$, $1\frac{1}{2}$ y $2\frac{1}{2}$ diámetros de júpiter en las emersiones que suceden al tiempo de las quadraturas de júpiter, esto es, quando está á 90° del sol, y pasa por el meridiano á las 6^h de la tarde.

DE LOS COMETAS.

1030 Los *cometas* son cuerpos celestes que se dexan ver de tiempo en tiempo con diferentes movimientos, y suelen ir acompañados de una luz despar-

Fig. parramada. Su movimiento aparente es muy distinto del de los demás planetas; pero quando se le refiere al sol, se halla que sigue las mismas leyes, porque haremos patente que los cometas se mueven al rededor del sol en elipses muy excéntricas.

1031 El movimiento de los cometas los distingue de las estrellas nuevas; porque en estas jamás se ha reparado movimiento propio; fuera de esto la luz de los cometas es debil y apacible, es una luz del sol que reflectan ácia nosotros, del mismo modo que los planetas. Esto lo prueba particularmente una fase observada en el cometa de 1744, de cuya parte alumbrada no se via mas que la mitad. Si estas fases no se reparan siempre, es porque la atmósfera espesa, en que están como sumergidos los mas de los cometas, desparrama la luz, por manera que siempre nos parecen casi redondos. Los cometas nos los dá á conocer mas que otra cosa la figura de la luz que los rodea y sigue, la qual yá se llama *cabellera*, yá *cola*, yá *barba*; sin embargo ha habido cometas sin cola, sin barba; y sin cabellera: tal era el que *Ticho* observó en 1585.

1032 Todos los cometas dan la vuelta al cielo en el discurso de 24 horas por una consecuencia de la revolucion de la tierra; tienen tambien un movimiento propio del mismo modo que los planetas, en virtud del qual correponden succesivamente á diferentes estrellas fixas. En virtud de este movimiento propio se mueven unas veces ácia el oriente, como los demás planetas, otras veces ácia el occidente, á veces á lo largo de la eclíptica ó del zodiaco, á veces perpendicularmente á la eclíptica.

1033 Despues que *Newton* hubo descubierto la atraccion, y averiguado que todos los planetas obedecen la fuerza central del sol, discurrió que los planetas no podian menos de ser otros planetas, y se-

seguir las mismas leyes en sus revoluciones al rededor del sol. Para esto era preciso que sus órbitas fuesen muy excéntricas, esto es, muy prolongadas, para poder explicar su larga desaparicion. Fig.

Para ver si este pensamiento concordaba con las observaciones, *Newtón* reconoció la órbita del cometa de 1680; halló que una porcion de elipse muy prolongada, ó lo que viene á ser lo propio (II. 635), una porcion de parábola, quadraba maravillosamente con todas las observaciones, con tal que se supusiesen las areas proporcionales á los tiempos, como en los movimientos planetarios (866).

1034 Desde entonces se han observado y calculado muchos cometas por espacio de meses enteros, en una gran porcion de la circunferencia del cielo, con desigualdades aparentes sumamente grandes, y sin embargo de todo esto quando se refieren á una parábola trazada al rededor del sol, se halla entre las observaciones y el cálculo tan prodigiosa conformidad, que no hay otra hypótesi mas verdadera, y esta es la que vamos á declarar.

El movimiento parabólico de los Cometas.

1035 El cálculo parabólico no es mas que una aproximacion; se sigue porque son muy fáciles los cálculos, y por lo mucho que una parábola se parece á una elipse muy prolongada. Su mayor ventaja consiste en que siendo las parábolas curvas semejantes, dan una misma proporcion entre los radios vectores colocados de un mismo modo, y así basta conocer las distancias perihelias de diferentes cometas para poderlos calcular todos por una misma tabla. Mas adelante daremos la construccion de esta tabla general donde la anomalía verdadera es dada para cada dia, cuya tabla sirve respecto de todos los cometas.

 La

Fig. 358. 1036 La tabla general supone un cometa cuya órbita sea la parábola *PCOD*; el sol *S* está en el focus; *P*, es el perihelio del cometa ó el vértice de la parábola; *SP*, es la distancia perihelia, la qual se supone igual á la distancia media de la tierra al sol, cuya distancia siempre sirve de escala para todas las distancias celestes.

Este cometa cuya distancia perihelia *SP* es igual á la distancia media del sol á la tierra, gasta 109 dias para ir desde *P* á *O*, ó desde el perihelio hasta el estremo de la ordenada *SO* perpendicular á *SP*. Para abreviar, le llamarémos cometa de 109 dias, y manifestarémos como á este se pueden referir todos los demás cometas, solo con mudar los tiempos.

1037 Lo primero que hemos de hacer para calcular el movimiento de los cometas es determinar la velocidad que debe verificarse en parábolas de diferentes tamaños; porque un cometa cuya parábola es mayor gasta mas tiempo en andar un ángulo de 90°, qual es el ángulo *PSO*, esto es, en ir desde *P* á *O*; del mismo modo que gasta saturno 30 veces mas tiempo en andar un grado de su órbita, que la tierra en andar un grado de la suya. Sentarémos primero dos proposiciones que nos hacen al caso.

359. 1038 El seno verso *AE* de un arco infinitamente pequeño *AP* es igual á $\frac{(AP)^2}{AD}$.

Porque $(EP)^2 = AE \cdot ED$ (I. 534); luego $AE = \frac{(EP)^2}{ED}$; pero *ED* es lo mismo que $ED + EA$ ó *AD*, pues *AE* es infinitamente pequeño; luego $AE = \frac{(EP)^2}{AD}$. En lugar de *EP* podemos substituir el arco *AP*, pues los arcos pequeños se confunden con sus senos, luego será $AE = \frac{(AP)^2}{DA}$.

1039 *La razon entre las velocidades en la pa-*

rábola y el círculo es la de $\sqrt{}$ 2 á 1.

Supongamos un cometa en P, que ande la parábola PO á la distancia SP del sol, y la tierra en T andando un círculo TLM, cuyo radio ST sea igual á SP. La fuerza central, ó la atraccion con que el sol detiene al cometa y á la tierra en sus órbitas, es igual, por ser una misma la distancia, y porque á la misma distancia no puede el sol obrar con mas fuerza en el cometa que en la tierra. Supongo un arco pequeño PC de la parábola, y un arco pequeño TL de la órbita de la tierra, tales que la abscisa PB de la parábola y la abscisa TI del círculo sean iguales; ó que el desvío de la tangente de la curva sea uno mismo en la parábola y el círculo; estas abscisas ó los desvíos de estas tangentes espresan la fuerza central del sol, pues son la cantidad que el planeta obedece al impulso del sol, desviándose de la linea recta; son, pues, iguales en un mismo tiempo, quando es una misma la fuerza. Luego si las abscisas son iguales, los arcos PC y TL son andados en tiempos iguales, y espresan las velocidades del cometa y de la tierra. Del supuesto que son iguales las dos inflexíones sacarémos los arcos mismos. Fig. 358.

Los arcos no pueden ser iguales, pues dos arcos iguales tomados en dos curvas muy diferentes no pueden tener inflexíones iguales, y quando las inflexíones son iguales no son iguales los arcos; de aquí inferiremos la razon entre los arcos, y esta será la de las velocidades, pues por ambas partes el tiempo es el mismo. La propiedad del círculo (1038) dá $TI = \frac{(IL)^2}{2ST}$; por la propiedad de la parábola (II. 264) tenemos $(BC)^2 = PB \times 4SP$; luego $PB = \frac{(BC)^2}{4SP} = \frac{(BC)^2}{4ST}$; pero $PB = TI$ por el

Fig. 358. supuesto, luego $\frac{(IL)^2}{2ST} = \frac{(BC)^2}{4ST}$; ó $2(IL)^4 = (BC)^2$; luego $IL\sqrt{2} = BC$, de donde se saca esta proporcion, $BC : IL :: \sqrt{2} : 1$. Pero $IL = TL$, ó discrepa quando mas una cantidad infinitamente pequeña; luego IL es la velocidad de la tierra; BC es tambien la velocidad del cometa; luego la velocidad del cometa es á la de la tierra á una misma distancia del sol, como la raiz de 2 es á 1.

1040 Síguese de aquí que la velocidad del cometa en P en la parábola PO, será los $\frac{7}{5}$ de la velocidad de la tierra; porque $\sqrt{2} = \frac{7}{5}$ con corta diferencia; luego la area andada en un segundo de tiempo por el cometa, será $\frac{7}{5}$ de la area andada por la tierra: Y como las areas siempre son iguales en tiempos iguales, síguese que á qualquiera distancia que llegue el cometa respecto del sol en su parábola PO, la area trazada en un segundo de tiempo, siempre será $\frac{7}{5}$ de la area que la tierra trazare, y la area que la tierra trazare será igual á la area del cometa dividida por $\frac{7}{5}$ ó $\sqrt{2}$. En esta proposicion nos fundarémos para probar que el cometa necesita 109 dias para ir de P á O, ó andar 90° de anomalía.

1041 Sea la distancia perihelia SP ó $ST = 1$; la circunferencia TM, ó el número 6, 283 (II. 667) $= c$; la area de este círculo será $\frac{c}{2}$, la area parabólica PSO, la qual es (II. 649) $\frac{2}{3} SP \cdot SO$ será $\frac{4}{3}$; esta area del cometa dividida por $\sqrt{2}$, dará $\frac{4}{3\sqrt{2}}$ para la area que la tierra traza (1040) en el mismo tiempo que el cometa vá de P á O. Pero si llamamos A la duracion del año, tendremos esta proporcion: la area total $\frac{c}{2}$ de la órbita terrestre es al tiempo A, como la area $\frac{4}{3\sqrt{2}}$ es al tiempo que le cor-

res-

responde; el qual será $\frac{84}{5c\sqrt{2}}$; este es el valor del tiempo que gasta el cometa en andar el arco parabólico *PO* ó á los 90° de anomalía verdadera. Fig. 358.

1042 La duracion del año syderal es de 365^d 6^h $9'$ $10''$ ú $11''$ (811), esto es, 365^d 256379; si de su logaritmo restamos el de $\sqrt{2}$, y el de tres veces la circunferencia, y añadimos al residuo el logaritmo de 8, sacarémos el log. de 109^d 6154, ó 109^d 14^h $46'$ $10''$ para el tiempo que corresponde á *PO*.

No basta haber determinado el tiempo que se gasta en andar estos 90° de anomalía, es preciso, para calcular el lugar de un cometa en todos tiempos, conocer el número de dias que corresponde á cada porcion de la parábola, como *PD*, ó á cada ángulo de anomalía verdadera contándole desde el perihelio, siempre en el supuesto de ser las areas proporcionales á los tiempos; este es el asunto de la siguiente:

1043 Cuestion. *Dada la anomalía verdadera en una parábola, hallar el tiempo corrido desde el perihelio.*

1044 Supongo que la parábola *PCOD* es dada, quiero decir, que se sabe qual es la distancia perihelia *SP*, y el tiempo gastado en andar el arco *PO*; hemos de determinar el tiempo gastado en andar otro arco *PD*, ú otro ángulo *PSD* de anomalía verdadera. Tirarémos la linea *DP*, y tomando *SE* y *SR* iguales al radio vector *DS*, tirarémos *DR* y *DE*, siendo la una la normal, y la otra la tangente de la parábola.

1045 Si tomamos por unidad la subnormal *RQ*, esto es la mitad del parámetro (II. 566), el parámetro será $=2$, y $PQ=\frac{(DQ)^2}{2}$ (II. 264);

 el

Fig. 358. el segmento parabólico $DOPQ$ será $\frac{2}{3}DQ \cdot PQ$ ó $\frac{1}{3}(DQ)^3$ (II. 649); el triángulo $DPQ = \frac{1}{2}DQ \cdot PQ = \frac{1}{4}(DQ)^3$; luego restándole del segmento $DOPQ$, quedará el segmento $DOPD = \frac{1}{12}(DQ)^3$; se le añadirá la superficie de triángulo $PDS = \frac{PS \cdot DQ}{2} = \frac{DQ}{4}$, y será $\frac{1}{12}(DQ)^3 + \frac{1}{4}DQ$ la area $PSDOP$.

1046 Si tomamos por unidad la linea RQ será DQ la tangente del ángulo $DRQ = \frac{1}{2} DSE$, esto es, la tangente de la mitad de la anomalía verdadera (I. 442 y 448). Si llamamos t esta tangente, la area parabólica $PSDOP$ será $= \frac{t^3}{12} + \frac{t}{4}$; la area de 90° será entonces $\frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$. Pero hemos de tomar por unidad la area PSO, y con esto la area $PSDOB$ será $\frac{t^3}{4} + \frac{3t}{4}$, porque $\frac{t^3}{12} + \frac{t}{4}$ es á $\frac{1}{3}$, como $\frac{t^3}{4} + \frac{3t}{4}$ es á 1; luego en conociendo la area de 90°, y la tangente t de una semianomalía verdadera, se multiplicará la área de 90° por $\frac{t^3}{4} + \frac{3t}{4}$, y se sacará la área trazada por el cometa desde su paso por el perihelio, y como las áreas son proporcionales á los tiempos sacarémos el tiempo que corresponde á PD, multiplicando los 109 dias, ó en general el tiempo de 90° por la quarta parte de $t^3 + 3t$.

V. gr. teniendo 47° de anomalía verdadera el cometa que gasta 109 dias en andar 90° de anomalía, se pregunta ¿quántos dias han pasado desde el perihelio? La tangente t de $23^\circ\frac{1}{2}$ es 0,4348124; luego $t^3 = 0,0829$, y la quarta parte de $t^3 + 3t = 0,3467$; luego hemos de multiplicar por 0,3467 los 109 dias,

dias, ó el tiempo para 90°. (1042), y saldrán 38 dias, luego el cometa de 109 dias estará á 47° de su perihelio al cabo de 38 dias. Fig. 358.

Del mismo modo se hallarían para cada grado de anomalía verdadera, los dias correspondientes. Salen por lo regular algunos quebrados decimales de mas, porque es muy raro que á un grado cabal de anomalía corresponda un número cabal de dias; pero por medio de partes proporcionales se hallan con facilidad las anomalías verdaderas que corresponden á cada dia cabal.

1047 Por este medio se ha formado una tabla de las órbitas parabólicas; en ella vá apuntada la anomalía verdadera que corresponde á cada dia de distancia al perihelio para el cometa de 109 dias. Esta tabla general se aplica igualmente á todos los cometas. Porque si se consideran distintos cometas en otras parábolas, á un mismo grado de anomalía verdadera, los tiempos corridos desde el paso por el perihelio serán unos con otros como los tiempos gastados en ir desde el perihelio hasta 90°. Quando v. gr. $\frac{t^3}{4}+\frac{3t}{4}$ fuere igual á $\frac{1}{2}$, el tiempo será la mitad del tiempo para 90°, en todas las parábolas posibles. De aquí se sigue que si conocemos respecto de un cometa qualquiera el tiempo de 90°, sacarémos, solo con hacer una regla de tres, el tiempo correspondiente á otro ángulo qualquiera de anomalía verdadera, por medio de la tabla calculada para el cometa de 109 dias. Solo falta, pues, buscar el tiempo de 90° para parábolas mayores, ó menores, ú el número de dias correspondiente al arco *PO*, quando la distancia perihelia *SP* no fuere igual á la distancia media de la tierra al sol.

1048 *Los quadrados de los tiempos que corresponden á una misma anomalía verdadera en diferen-*

Fig. *tes parábolas, son como los cubos de las distancias*
358. *perihelias.*

Esta ley análoga á la del movimiento de los planetas (865), es tambien una consequencia forzosa de las fuerzas centrales. Porque hemos probado que en el radio de la órbita terrestre andado en 365^d, teníamos un quadrante de parábola de 109 dias (1042); por consiguiente el tiempo de la parábola es como $\frac{3}{10}$ del del círculo. Pero si consideramos diferentes círculos ó diferentes planetas, á otras distancias del sol, sacarémos diferentes revoluciones, tales que los quadrados de los tiempos serán como los cubos de las distancias (875); luego los tiempos de las párábolas, que siempre son los $\frac{3}{10}$ seguirán la misma razon; luego los tiempos que corresponden á *PO*, son como las raices quadradas de los cubos de las distancias perihelias *SP*.

1049 Por consiguiente una misma tabla bastará para hallar la anomalía verdadera en todas las parábolas, con tal que se aumenten los tiempos en razon de la raiz qnadrada del cubo de la distancia perihelia. Con efecto, para un mismo tiempo de anomalía verdadera, los quadrados de los tiempos de diferentes parábolas han de crecer como los cubos de las distancias perihelias, ó los tiempos como las raices quadradas de los cubos de las distancias perihelias. Así, á 90° de anomalía verdadera corresponden 109 dias quando la distancia perihelia es 10 (1042), y 126 dias quando la distancia perihelia es 11, porque la raiz quadrada del cubo de 11 es mayor en la misma razon; luego se han de aumentar tambien en la misma razon los demas números de dias, quando se buscaren en la tabla general las anomalías para el cometa de 126 dias.

En la tabla adjunta vá señalado, al lado de cada distancia perihelia, el número por el qual se han de mul-

multiplicar los dias de la tabla general, para sacar Fig.
los dias que respecto de otros cometas corresponden á una misma anomalía. Supónese la distancia del sol á la tierra dividida en diez partes, y se ha calculado el número de los dias para el arco *PO* en once parábolas diferentes. En la figura se ven 360.
muchas parábolas divididas en dias, y en ellas se puede vér con que velocidad cada uno de estos cometas se apartaría del sol ó de la tierra cuya órbita es *ABC*.

Distancia perihelia en décimas de la del sol.	Número por el qual se multiplican los dias de la tabla.	Dias para 90°
1	0,035	3,5
2	0,089	9,8
3	0,164	18,0
4	0,253	27,7
5	0,353	38,8
6	0,465	50,9
7	0,585	64,2
8	0,715	78,4
9	0,854	93,6
10	1,000	109,6
11	1,152	126,3

1050 Esta tabla manifiesta que quando la distancia perihelia del cometa es $\frac{4}{10}$ de la de la tierra al sol, es preciso, en lugar de los dias de la tabla, tomar otros que no sean mas que 0, 25 ó la quarta parte; esta es la razon porque el cometa cuya distancia es 4 no gasta mas de 28 dias en andar

Fig. dar los 90° de anomalía, y podemos llamarle el cometa de 28 dias, del mismo modo que hemos llamado cometa de 109 dias, para abreviar, el que gastaría unos 109 dias en ir desde el perihelio hasta 90° de anomalía.

Luego para cada grado de anomalía, al log. de los dias de la tabla deberá añadirse una vez y media el log. de la distancia perihelia de un cometa dado, y saldrá el numero de dias que corresponde á este cometa dado, para el mismo grado de anomalía; ó recíprocamente la anomalía para un número de dias dado, empezando á contar desde el perihelio.

1051 *El radio vector* SD *del cometa ó su distancia al sol es igual á la distancia perihelia* SP, *dividida por el quadrado del coseno de la mitad de la*
358. *anomalía verdadera.*

Porque si desde el focus S tiramos á la tangente ED una perpendicular SX, el ángulo ESD estará dividido en dos partes iguales, pues el triángulo ESD es isósceles (II. 271); y por ser SX paralela á DR, el ángulo DRQ será igual al ángulo XSE, esto es, á la mitad de PSB que es la anomalía verdadera. En el triángulo RDE, rectángulo en D, sacaremos por razon de la perpendicular DQ esta proporcion (I. 523) $RQ : RD :: RD : RE$ ó $2PS : RD :: RD : 2SD$, luego (I. 210) $2PS : 2SD :: (RQ)^2 : (RD)^2$. Pero $RQ : RD :: \cos QRD : 1$; luego $PS : SD :: \cos^2 QRD : 1 :: \cos^2 \frac{1}{2} PSD : 1$, ó como el quadrado del coseno de la mitad de la anomalía PSD es al quadrado del radio. Así, una vez hallada para un tiempo dado la anomalía verdadera de un cometa en su parábola (1049), se saca el radio vector SD con dividir la distancia perihelia SP por el quadrado del coseno de la mitad de esta anomalía, y si fuere conocido un radio

dio vector con la anomalía correspondiente, se podrá sacar la distancia perihelia. Fig.

1052 En conociendo dos radios vectores de una parábola, y el ángulo que forman, se puede determinar la distancia perihelia y las dos anomalías que corresponden á los radios vectores. Sean b y c los dos radios vectores de una parábola, cuya distancia perihelia es 1; a, la quarta parte de la suma de las dos anomalías verdaderas; x, la quarta parte de la diferencia de estas dos anomalías, tendremos esta proporcion $\sqrt{b}+\sqrt{c} : \sqrt{b}-\sqrt{c} :: \cot a : \tang x$.

Porque el quadrado del coseno de la mitad de la anomalía verdadera es al quadrado del radio, como 1 es al radio vector (1051), pero la mayor de las dos anomalías es $2a+2x$, la menor $2a-2x$ (II. 115); luego $\sqrt{b} : \sqrt{c} :: \cos(a-x) : \cos(a+x)$. Pero $\cos(a-x) = \cos a \,.\, \cos x + \text{sen}\, a \,.\, \text{sen}\, x$ (II. 328), y $\cos(a+x) = \cos a \,.\, \cos x - \text{sen}\, a \,.\, \text{sen}\, x$; luego $\sqrt{b} \times \cos a \,.\, \cos x - \sqrt{c} \,.\, \cos a \,.\, \cos x = \sqrt{b} \,.\, \text{sen}\, a \,.\, \text{sen}\, x + \sqrt{c} \,.\, \text{sen}\, a \,.\, \text{sen}\, x$; luego $\sqrt{b}+\sqrt{c} : \sqrt{b}-\sqrt{c} :: \cos a \,.\, \cos x : \text{sen}\, a \,.\, \text{sen}\, x :: \frac{\cos x}{\text{sen}\, a} : \frac{\text{sen}\, x}{\cos a} :: \cot a : \tang x$; y quiere decir que la suma de las raices de los radios vectores es á su diferencia, como la cotangente de la semisuma de las semianomalías verdaderas es á la tangente de su semidiferencia. Una vez hallada la suma ó la diferencia, es facil de determinar cada una de las anomalías verdaderas, y por medio del tiempo que les corresponde, el tiempo del paso por el perihelio, y al mismo tiempo el lugar del perihelio.

1053 Las proposiciones hasta aquí demostradas abren camino para hallar una parábola que cumpla con

Fig. con dos longitudes de un cometa observadas desde
358. la tierra. Supongamos la tierra en *T* á la distancia *TS* del sol, y que vea el cometa reducido á la eclíptica por un rayo *TD*, de modo que el ángulo *STD* sea el ángulo de elongacion, ó la diferencia entre la longitud del sol y la del cometa. En el triángulo *STD* solo se conoce un lado y un ángulo, y es preciso hacer un supuesto ó una hypótesi del valor del lado *SD* distancia acortada del cometa al sol. En virtud de este supuesto, arbitrario á la verdad, pero que el cálculo justificará ó reprobará se busca el ángulo en el sol resolviendo el triángulo *TSD*, y se saca la longitud heliocéntrica del cometa, su latitud heliocéntrica (850), su distancia verdadera (852), ó el radio vector.

Se hace lo propio respecto de otra observacion y se sacan dos longitudes heliocéntricas, y por consiguiente el ángulo de los dos radios vectores, que es forzosamente la suma ó la diferencia de las dos anomalías verdaderas. De aquí se inferirá cada una de las dos anomalías (1052), y por consiguiente el lugar del perihelio; la distancia perihelia (1051); y el tiempo que corresponde á estas dos anomalías (1050), en la hypótesi que se hubiere hecho de la distancia *SD* del cometa al sol. Pero si el intervalo de tiempo hallado por medio de estas dos anomalías, no concordare con el intervalo dado entre las dos observaciones, será señal de que se ha de mudar la una de las dos distancias al sol supuestas; se dexará la una y se mudará la otra por medio de varios supuestos, hasta que por último el cálculo dé un intervalo de tiempo igual al de las dos observaciones, y entonces estará determinada la parábola que cumple con ambas.

1054 Pero no basta hallar una parábola que cumpla con el intervalo de las dos observaciones; hay

hay infinitas; porque á cada hypótesi que se hiciere de la distancia *SD* del cometa al sol, se hallará por medio de los diferentes supuestos de la segunda distancia, ó de la distancia al sol en la segunda observacion una parábola que cumplirá con las mismas dos observaciones. La dificultad está en determinar por medio de otra observacion entre todas las parábolas que representan las dos primeras, la única que concuerda con la tercera observacion. Fig. 358.

1055 Dadas tres observaciones de un cometa se puede determinar su órbita en virtud de las proposiciones antecedentes; porque se puede hallar la parábola que cumple con tres observaciones, una vez determinada la que cumple con dos. Se toman desde luego dos longitudes y dos latitudes geocéntricas observadas, se buscan parábolas que quadren con estas dos observaciones; en hallando dos ó tres parábolas, esto es, dos ó tres hypótesis que concuerden igualmente con las dos primeras observaciones, se calcúla en cada una de estas hypótesis el lugar del cometa al tiempo de la tercera observacion; buscando el lugar del perihelio (1052), la distancia perihelia (1051), la anomalía verdadera (1050), el radio vector, la longitud heliocéntrica, y finalmente la longitud geocéntrica (849); entre estas diferentes hypótesis la que mejor concordare con la tercera observacion, será la mejor.

FIN

DEL TOMO TERCERO.

360

A

S

C

D

59

360

A

S

C

D

59